

Sucesiones y series

Agustin Louis Cauchy

Nació el 21 de agosto de 1789 en París, Francia. Falleció el 23 de mayo en Sceaux (cerca de París). Agustín Louis Cauchy, pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos, también investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Trabajó como ingeniero militar, y en 1810, llegó a Cherbourg a trabajar junto a Napoleón en la invasión a Inglaterra. En 1813 retornó a París y luego fue persuadido por Laplace y Lagrange para convertirse en un devoto de las matemáticas. Ocupó diversos puestos en la Facultad de Ciencias de París, el Colegio de Francia y la Escuela Politécnica. En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

es divergente

La serie de Fibonacci

Una función serie es llamada **serie de Fibonacci**. Los dos primeros términos de la serie de Fibonacci son 1 y 1; después, cada término sucesivo se encuentra sumando los dos términos anteriores. De esta manera, los primeros doce términos de la serie de Fibonacci son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

La serie de Fibonacci ocurre alguna vez en la naturaleza. Por ejemplo, el árbol familiar de una abeja macho puede formar una serie de Fibonacci. Una abeja macho, o zángano, es una cría de un huevo no fértil puesto por su madre. De esta manera, tiene madre pero no padre. Una abeja hembra es cría de un huevo fertilizado. Varias generaciones del árbol familiar de la abeja macho serían como las mostradas en la figura 1.

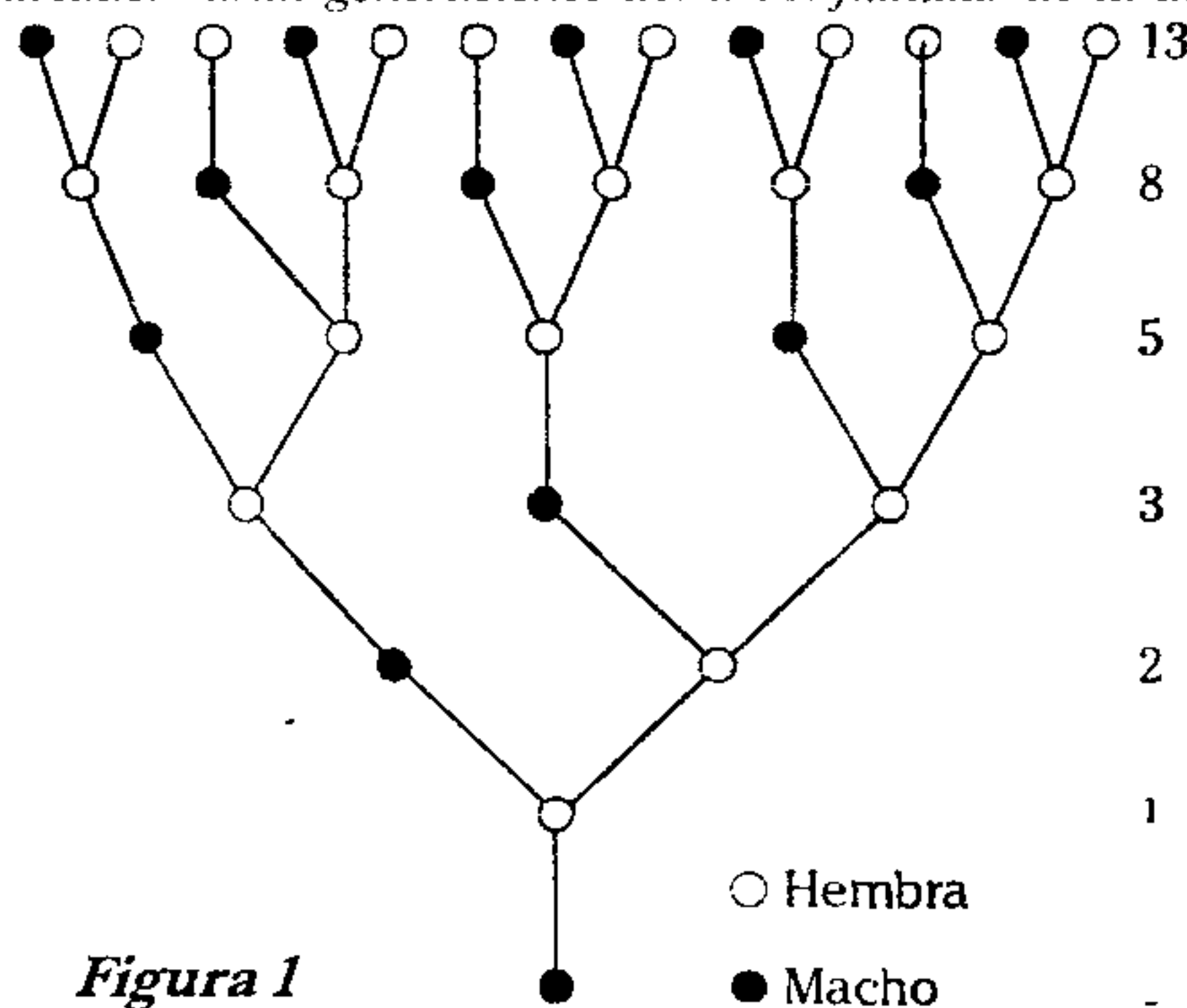


Figura 1

○ Hembra
● Macho

Los números de Fibonacci ocurren en la razón del Modular ideado por Le Corbusier para adaptar la escala arquitectónica a las dimensiones humanas. Tomando la altura de un hombre como 1,829, lo divide en dos secciones partiendo del ombligo, con una razón 5:8 aproximadamente la "razón de oro" (1,618...) como en el arte clásico griego, etc. En la naturaleza, los números de Fibonacci se presentan en el número de espirales de las piñas de los pinos, en los pétalos de ciertas flores, y en los arreglos de las hojas sobre las ramas.

Mes	El problema de los conejos	Número de pares
Enero	1 ↓	1
Febrero	1 ↓	1
Marzo	1 2 ↓ ↓	2
Abril	1 3 2 ↓ ↓ ↓	3
Mayo	1 4 3 2 5 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓	5
Junio	1 6 4 3 7 2 8 5 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓	8
Julio	1 9 6 10 4 3 11 7 2 12 8 5 13 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓	13

Leonardo de Pisa (Fibonacci) propuso este original problema en 1202: ¿Cuál es el número de parejas de conejos al principio cada mes, si una sola pareja de conejos recién nacidos es puesta en un corral a principios de Enero, y si cada pareja engendra una nueva pareja al principio del segundo mes siguiente al nacimiento y una pareja adicional al principio de cada mes siguiente? La tabla da los primeros siete números de Fibonacci.

Fuente: Charles D. Miller - "Introducción al pensamiento matemático".

Sucesiones y series

OBJETIVOS

- Determinar la convergencia o divergencia.
- Saber aplicar los criterios de convergencia en las series y sucesiones.
- Formar sucesiones, cuyos elementos sean funciones.

INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos a las sucesiones, particularmente a las sucesiones convergentes, cuyo concepto intuitivo involucra dos ideas tan sugestivas como difíciles de cuantificar: el infinito y su expresión como aproximación progresiva a un objeto al que nunca se logra alcanzar.

La definición del límite, es la más importante del análisis porque tiene la virtud de reducir esas dos categorías de por sí, puramente idealistas, a términos verdaderamente matemáticos.

Seguidamente veremos las series sobre todo aquéllos de términos positivos. Uno de los problemas que más preocupó a los matemáticos a lo largo de la historia fue tratar de extender a infinitos sumandos el concepto de suma finita. La cuestión provocó, entre otras, la llamada “paradoja del corredor” postulada por Zenón de Elea y que, básicamente, consistía en afirmar que un corredor no puede alcanzar jamás la meta, pues cuando haya cubierto la mitad de la distancia que le separaba de ella, aún habrá de superar un camino equivalente al ya recorrido, y así sucesivamente. Es decir, alcanzar la meta significaba

que, mediando hasta ella una distancia d , la secuencia infinita $\frac{d}{2}, \frac{d}{4}, \frac{d}{8}, \frac{d}{16}, \dots, \frac{d}{2^n}, \dots$ podría sumarse (con igual suma d), lo cual Zenón consideraba, erróneamente y a priori, imposible.

Lo cierto es que, como en el caso de la paradoja, hay sumas infinitas que sí pueden sumarse. Otras veces no es posible. Pero incluso en el primer caso, en muchas ocasiones será difícil calcular la suma. Normalmente debemos contentarnos con saber si ésta existe, para lo cual hay diversos criterios, cuya exposición es el principal objeto de este capítulo.

SUCESIÓN

SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

DEFINICIÓN

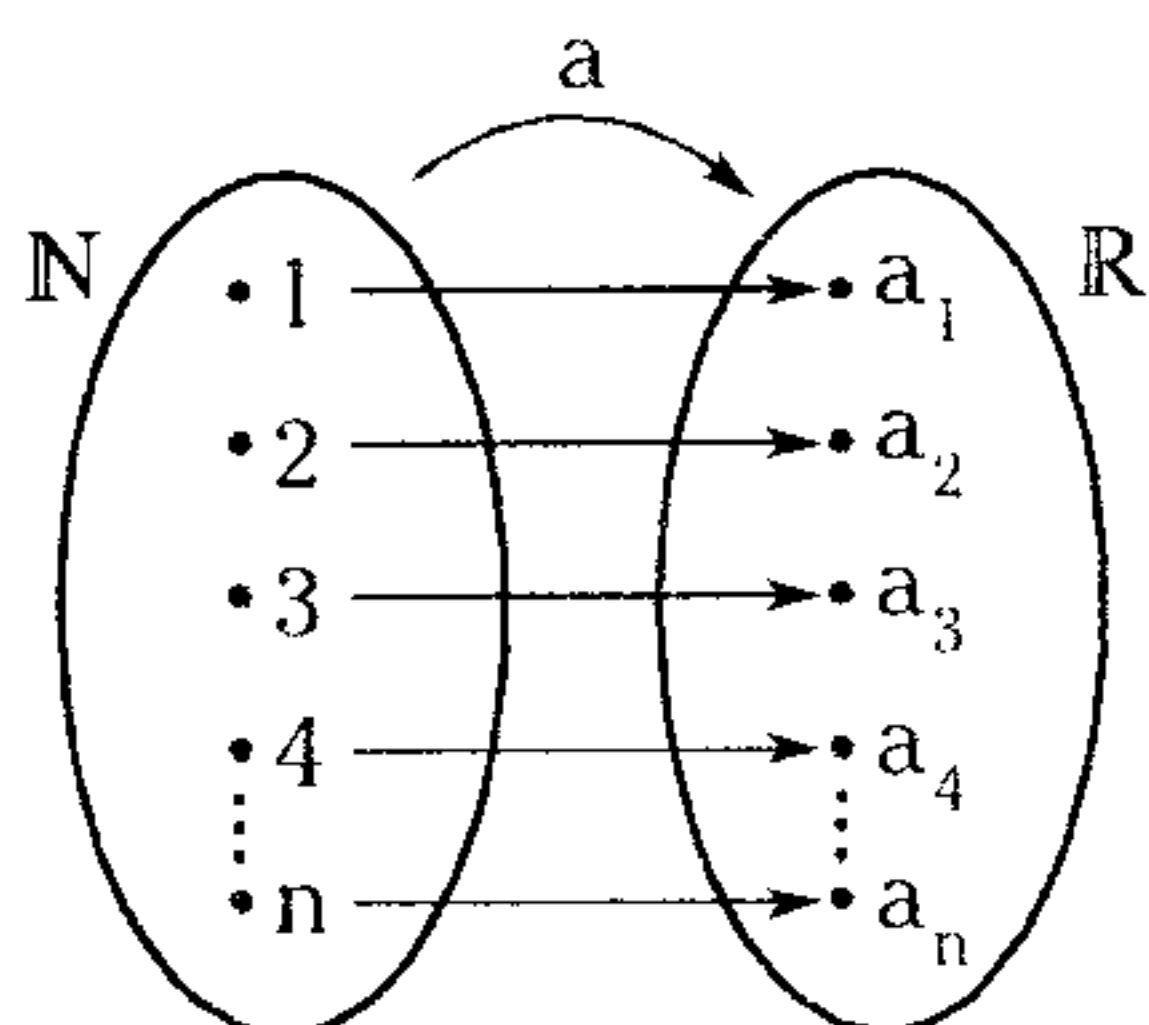
Se denomina sucesión de números reales a toda función definida sobre el conjunto de los números naturales y que toma valores en \mathbb{R} .

Dicho de otra manera, una sucesión es una función cuyo dominio es \mathbb{N} y cuyo rango es un subconjunto de \mathbb{R} .

Notación:

Una sucesión $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ es denotada por (a_n) o también por $\{a_n\}$

Utilicemos el diagrama de Venn para apreciar esta función.



Haciendo explícita la ley de formación de los términos tenemos:

$$(a_n): a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

de donde:

$a_n = a_{(n)}$ es el término general de la sucesión

Ejemplos:

- $(n^2): 1^2, 2^2, 3^2, \dots$

- $\left(\frac{1}{n}\right): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

- Si $a_n = 2^n$
 $(2^n): 2, 2^2, 2^3, \dots$

también podemos escribirlo así:

$$a = \{(1; 2); (2; 2^2); (3; 2^3); \dots\}$$

- Podemos definir la sucesión utilizando una fórmula recursiva, veamos el siguiente ejemplo.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n \end{cases}$$

La sucesión es:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ a_3 &= a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \\ a_4 &= a_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_n = a_{n-1} + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por lo tanto: $(a_n): 1, 3, 6, 10, \dots$

IGUALDAD DE SUCESIONES

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones:

$$(a_n) = (b_n) \Leftrightarrow a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

OPERACIONES CON SUCESIONES

Sean las sucesiones (a_n) , (b_n) y (c_n)

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

$$(c_n) = (a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n) \Leftrightarrow c_n = a_n \pm b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

MULTIPLICACIÓN

$$(c_n) = (a_n)(b_n) = (a_n b_n) \Leftrightarrow c_n = a_n b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

$$(c_n) = k(a_n) = (ka_n) \Leftrightarrow c_n = ka_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}$$

4. DIVISIÓN

$$(c_n) = \frac{(b_n)}{(a_n)} = \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \Leftrightarrow c_n = \frac{b_n}{a_n} ; a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo 1

Sean las sucesiones $(a_n) = (n^2)$ y $(b_n) = \left(\frac{1}{n+1} \right)$

Hallemos $(a_n + b_n)$

Resolución:

$$(a_n): 1; 2^2; 3^2; 4^2; \dots; n^2; \dots$$

$$(b_n): \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n+1}; \dots$$

$$(a_n + b_n): 1 + \frac{1}{2}; 4 + \frac{1}{3}; 9 + \frac{1}{4}; \dots; n^2 + \frac{1}{n+1}; \dots$$

Es decir,

$$(a_n + b_n): \frac{3}{2}; \frac{13}{3}; \frac{37}{4}; \dots; \underbrace{\frac{n^3 + n^2 + 1}{n+1}}_{\text{término general}}; \dots$$

Ejemplo 2

Decir cuáles son los términos de la sucesión $(e_n) = 5(a_n) - (b_n)(c_n) + (d_n)$ y halle e_{200} donde:

$$(a_n): \left(1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \frac{1}{125}; \dots \right)$$

$$(b_{n+1}): (5 - b_n), b_1 = 1$$

$$(c_n): (2)$$

$$(d_n): (n)$$

Resolución:

$$(a_n): 1; \frac{1}{5}; \frac{1}{25}; \dots; \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$(b_n): 1; 4; 1; \dots$$

$$(c_n): 2; 2; 2; \dots$$

$$(d_n): 1; 2; 3; \dots$$

$$\text{entonces } (e_n): 4; -5; \frac{6}{5}; \dots$$

$$\text{Además, } e_{200} = 5a_{200} - b_{200}c_{200} + d_{200}$$

$$= 5 \left(\frac{1}{5^{199}} \right) - (4)(2) + 200 \approx 192$$

TIPOS DE SUCESIONES

1. SUCESIONES MONÓTONAS

Si la sucesión (a_n) es monótona, entonces ésta puede ser:

a. Creciente

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

es decir si:

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$(a_n): 2, 4, 6, 8, 10$$

b. Decreciente

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

es decir si:

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$(a_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

c. No Creciente

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

es decir si:

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$(a_n): 3, 2, 2, 1, 0, 0, 0, -1, -3, -3, \dots$$

d. No Decreciente

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

es decir si:

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$(a_n): 2, 4, 4, 6, 7, 8, 8, 8, 10, \dots$$



Si $a_n = a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces se llama sucesión constante.

Ejemplo: $(a_n): 3; 3; 3; 3; \dots$

Ejemplo:

Las aproximaciones decimales sucesivas por defecto de la $\sqrt{2}$ forman una sucesión monótona creciente; y las aproximaciones por exceso, una sucesión monótona decreciente.

2. SUCESIONES ACOTADAS Y NO ACOTADAS

a. Sucesiones acotadas superiormente

Se dice que una sucesión (a_n) es acotada superiormente, cuando existe un número k , llamado cota superior de la sucesión, tal que $a_n < k$, para todo n .

(Todos los términos de la sucesión son menores a k)

Simbólicamente:

$$\exists k \in \mathbb{R} / a_n < k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

Si piensas en la sucesión de las áreas de los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, cuando el número de lados se aumenta indefinidamente, advertirás claramente que dichas áreas son todas menores que el área del círculo, en este caso la sucesión está acotada superiormente.

b. Sucesiones acotadas inferiormente

Se dice que una sucesión (a_n) es acotada inferiormente, cuando existe un número M , llamado cota inferior de la sucesión, tal que $a_n > M$, para todo n . (todos los términos de la sucesión son mayores que M).

Ejemplo:

La sucesión de las áreas de los polígonos regulares circunscritos en una circunferencia, cuando el número de lados se aumenta indefinidamente, sus términos son mayores que el área del círculo correspondiente; en este caso se dice que la sucesión está acotada inferiormente.

c. Sucesión acotada

Una sucesión es acotada cuando lo es superiormente e inferiormente, es decir cuando admite una cota inferior M , y una cota superior K .

Se cumplirá por tanto: $M < a_n < K$, para todo n .

Ejemplo:

$$\text{Si } a_n = \frac{1}{n}$$

$$\text{entonces, } (a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

podemos decir que $0 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore (a_n)$ es acotada

Dicho de otra manera:

Si el valor absoluto del n -ésimo término de la sucesión (a_n) es menor que algún número positivo N .

Simbólicamente: $\exists N / |a_n| < N \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

En el ejemplo anterior:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

se cumple $|a_n| < 2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

es decir $-2 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore (a_n)$ es acotada.

d. Sucesión no acotada o sucesión infinita

Es aquella sucesión que no posee cota superior, cota inferior o carece de ambas.

Ejemplo:

Las siguientes sucesiones son no acotadas:

- $(a_n) = (n^2)$

$$(a_n): 1; 2^2; 3^2; 4^2; \dots$$

Esta sucesión no está acotada superiormente, pues dado un número k , por grande que sea, para que se tenga $n^2 > k$, bastará que $n > \sqrt{k}$

- $\{b_n\} = \{(-n^3)\}$

$$\{b_n\}: -1; -8; -27; \dots$$

Esta sucesión no está acotada inferiormente, pues dado un número M , por pequeño que sea, para que $-n^3 < M$, bastará tomar $n > -M$.



Una sucesión se dice que es alternante u oscilante si y sólo si $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo:

Si $a_n = (-1)^n$

$$(a_n): -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

Estas sucesiones no son monótonas.

Ejercicio

Clasificar las siguientes sucesiones:

1. $a_{n+1} = 3a_n, a_1 = 5$

2. $\{a_n\} = \{\text{parte entera de } \sqrt{n}\}$

3. $a_{n+1} = 3 - a_n; a_1 = 1$

4. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

5. $a_{n+1} = -a_n; a_1 = -5$

Resolución:

1. $a_{n+1} - a_n = 3a_n - a_n = 2a_n > 0$, ya que todos sus términos son positivos.

Entonces, $a_{n+1} - a_n > 0$

$$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

\therefore esta sucesión es creciente.

2. Esta sucesión es no decreciente puesto que $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ lo cual se puede notar en la lista de sus términos.

$$(a_n): 1; 1; 1; 2; 2; 2; \dots$$

3. Esta sucesión no es monótona, puesto que sus términos son:

$$(a_n): 1; 2; 1; 2; 1; 2; \dots$$

4. $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0$$

$$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

\therefore esta sucesión es decreciente.



Algunas veces podemos definir una sucesión considerando como dominio el conjunto de los números naturales incluido el cero, lo cual no genera ningún problema matemático.

Ejemplo:
$$\begin{cases} S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n+1} \\ S_0 = 1 \end{cases}$$

entonces $(S_n): 1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots$

SUBSUCESIONES

Se dice que (a_n) es una subsucesión de (b_n) si (a_n) es una sucesión que se obtiene tomando un número infinito de términos de la sucesión (b_n) en el mismo orden que aparecen en (b_n) .

Ejemplo:

Obtener dos subsucesiones de (a_n) sabiendo que su término general está dado por $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Resolución:

$$(a_n): 2, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \dots$$

Dos subsucesiones son:

$$(b_n): 2, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^5}{5!}, \dots \Rightarrow b_n = \frac{2^{(2n-1)}}{(2n-1)!}$$

$$(c_n): \frac{2^2}{2!}, \frac{2^4}{4!}, \frac{2^6}{6!}, \dots \Rightarrow c_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$



Una subsucesión es también una sucesión.

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

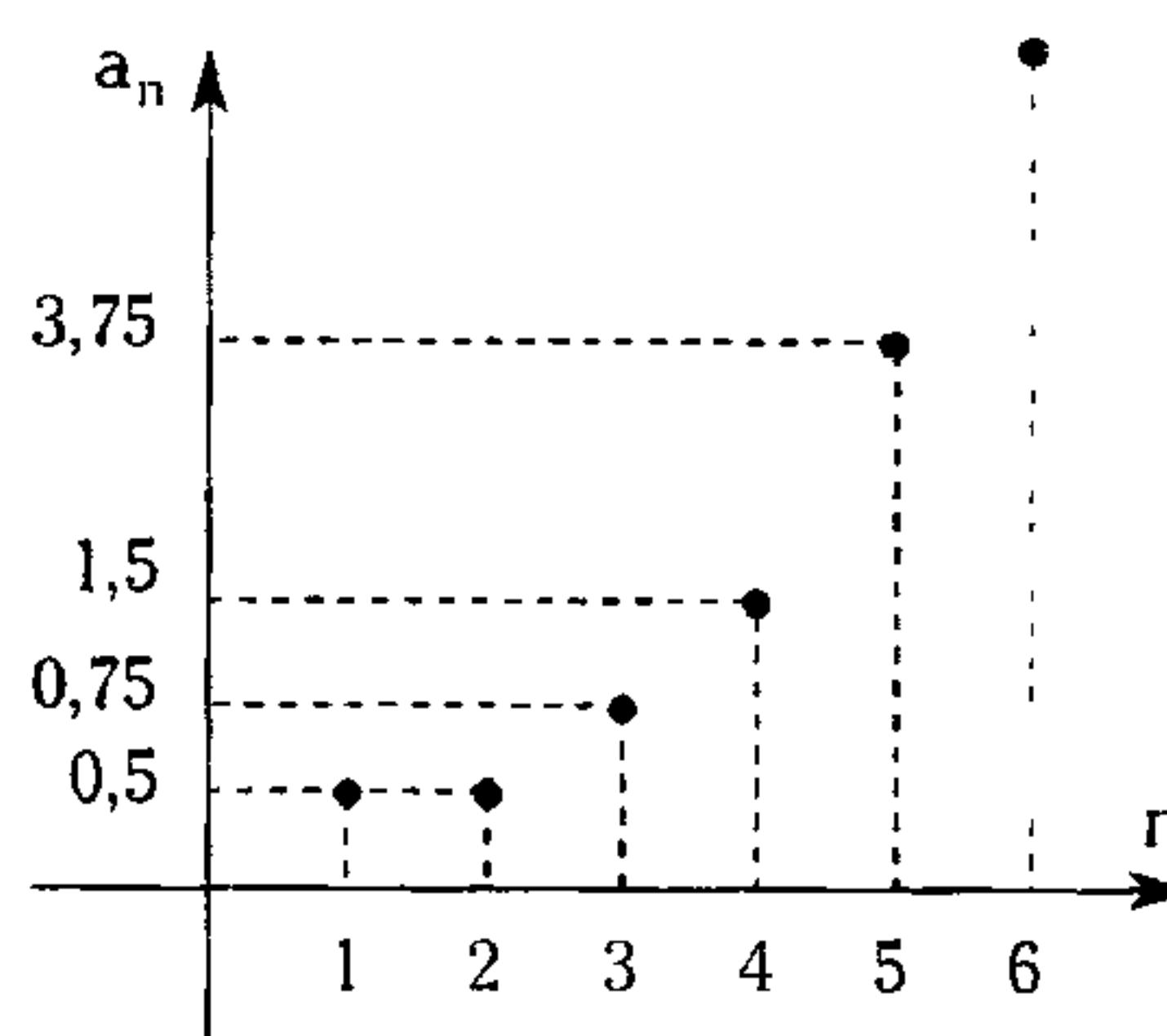
La gráfica de una sucesión puede darse en el plano cartesiano, donde a cada par $(n; a_n)$ le corresponde un punto en el plano, un conjunto de puntos es la imagen geométrica de una sucesión.

Ejemplo:

Graficar la sucesión (a_n) donde $a_n = \frac{n!}{2^n}$

Al desarrollar $(a_n): \frac{1!}{2^1}; \frac{2!}{2^2}; \frac{3!}{2^3}; \frac{4!}{2^4}; \dots$ que simplificando se tiene:

Se tiene $(a_n): \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}, \frac{45}{4}, \dots$



Se puede observar que esta sucesión es no decreciente y no está acotada superiormente.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Si los términos de una sucesión (a_n) se aproximan a un número L , se dice que la sucesión tiende al límite L , y se denota: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (o

$a_n \rightarrow L$ cuando $n \rightarrow \infty$).

Ahora definámoslo formalmente: Se dice que L es el límite de la sucesión (a_n) cuando para todo número real $\varepsilon > 0$; dado arbitrariamente pequeño, se puede obtener $N \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos a_n con índice $n > N$ cumplen la condición $|a_n - L| < \varepsilon$.

Simbólicamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

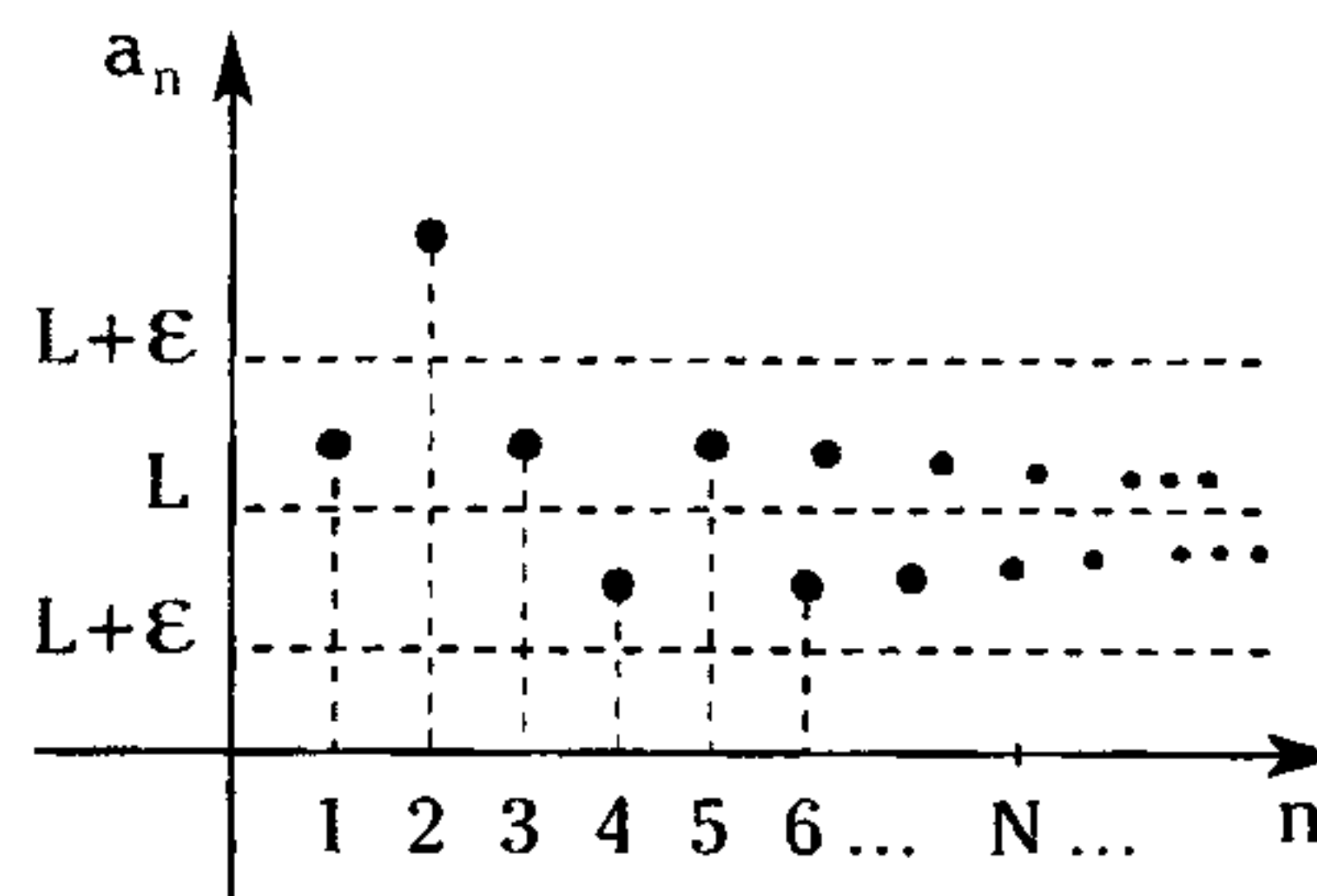
Esta importante definición significa que, para valores muy grandes de n , los términos a_n permanecen tan próximos a L cuanto se desee.

Recordar que $|a_n - L| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

Gráficamente:



CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

Una sucesión que posee límite real se llama convergente, en caso contrario se llama divergente.

Ejemplo:

Consideremos las sucesiones (a_n) , (b_n) y (c_n)

- $a_n = \sqrt[n]{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1$
entonces (a_n) converge a 1.
- $b_n = \frac{n!}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$
entonces (b_n) diverge a $+\infty$
- $c_n = 1 + (-1)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2 \quad \text{ó} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$
(n par) (n impar)

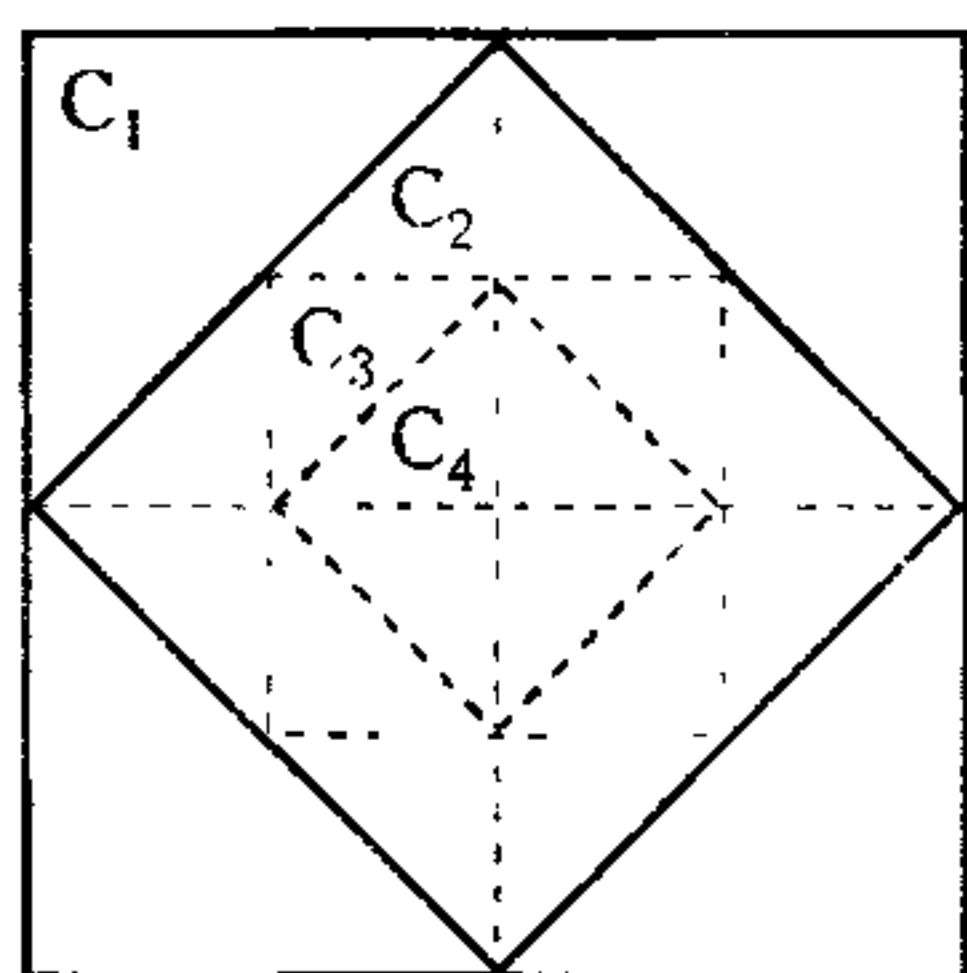
entonces (c_n) no es convergente. Esta sucesión es oscilante, a este tipo de sucesión también lo consideraremos como divergente.

Ejercicio:

Consideremos un cuadrado de lado igual a la unidad, que representamos por c_1 . Si se unen los puntos medios de sus lados (por segmentos rectilíneos) se obtiene otro cuadrado, c_2 ; uniendo los puntos medios de los lados de c_2 se obtiene otro cuadrado, c_3 ; y continuando así indefinidamente, uniendo cada vez los puntos medios de los lados del último cuadrado obtenido, se llega a una sucesión de cuadrados.

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_n, \dots$$

Representemos las áreas de estos cuadrados por $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ respectivamente.



En primer lugar calculamos la expresión del área S_n .

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Luego, la sucesión de áreas es la siguiente:

$$(S_n): 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots$$

$$\text{entonces } S_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Todo el mundo comprende, por intuición, que el área S_n puede llegar a ser tan pequeña como queramos, tomando n suficientemente grande, pero esto debe ser demostrado matemáticamente, es decir, debemos probar que dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, se puede encontrar un término de (S_n) tal que él y todos los siguientes sean menores en módulo que ε (es decir, $S_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$).

En efecto:

$$\text{para que } \left| \frac{1}{2^{n-1}} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\text{entonces } \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$$

$$\text{lo que es lo mismo } 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Tomando logaritmos:

$$(n-1)\log 2 > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\text{Despejando: } n > 1 - \log_2 \varepsilon$$

Conclusión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0, \text{ pues dado un } \varepsilon > 0 \text{ cualquiera}$$

$$\left| \frac{1}{2^{n-1}} \right| < \varepsilon \text{ para todo } n > 1 - \log_2 \varepsilon$$

\therefore la sucesión (S_n) converge a cero.

TEOREMAS

1. Unidades del límite: Una sucesión no puede converger en dos límites diferentes.
2. Si la sucesión (a_n) converge en $x \in \mathbb{R}$, entonces toda subsucesión de (a_n) converge con x .
3. Toda sucesión convergente es acotada (en sentido inverso, no necesariamente se cumple).
4. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Corolario (De Bolzano Weierstrass)

Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.

5. Toda sucesión monótona y no acotada es divergente, diverge a $+\infty$ ó $-\infty$.

ya que, en virtud del postulado de Dedekind, cada término de (a_n) (número real) sólo tiene un punto correspondiente sobre la recta.

3. Debemos demostrar que

$$\exists k \in \mathbb{R} / |a_n| < k; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que (a_n) es convergente y sea L su límite, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / n > N$$

$$\Rightarrow \underbrace{|a_n - L|}_{(*)} < \varepsilon$$

Veamos: $a_n = a_n - L + L$

$$|a_n| = |a_n - L + L|,$$

aplicando la desigualdad triangular.

$$|a_n| \leq |a_n - L| + |L|$$

Por (*) $|a_n| < \varepsilon + |L| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Esto quiere decir que todos los términos de (a_n) están acotados por $\varepsilon + |L|$, es decir:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, \text{están acotadas por } \varepsilon + |L|$$

$$\text{Así: } k = \max = \{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, \varepsilon + |L|\}$$

$$\therefore |a_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



$$\text{Si } 0 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$\text{Si } r > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

Ejercicio:

Demostrar que la sucesión (a_n) , con $a_n = r^n$, es convergente, $|r| < 1$.

1. Probemos que es acotada:

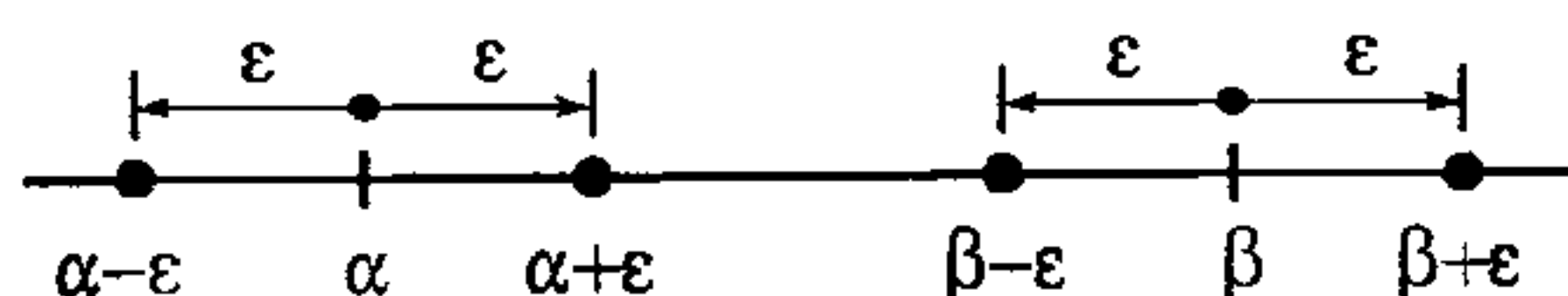
Como $0 < r < 1$ entonces existe un $b > 1$ tal que

$$r = \frac{1}{b} < 1, \text{ y entonces } r^n = \frac{1}{b^n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore |r|^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demostremos algunos de estos teoremas:

1. Supongamos que (a_n) tuviese dos límites distintos: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



Elijamos un $\varepsilon > 0$, menor que la mitad de la longitud del segmento $\overline{\alpha\beta}$. Si rodeamos los puntos α y β de sendos entornos de semiamplitud ε , dichos entornos serán disjuntos (no se intersectarán). Ahora si (a_n) tiene por límite α , todos sus términos a partir de uno, que representaremos por a_k , pertenecerán al entorno de α ; análogamente, si β fuese también límite de (a_n) , todos los términos de (a_n) , a partir de uno, que representaremos por a_N pertenecerán al entorno de β . Si consideramos los términos de (a_n) siguiente a a_k (a_{k+1}) y a a_N (a_{N+1}) dichos términos tendrían que pertenecer simultáneamente al entorno de α y al de β , lo cual es absurdo,

II. Probemos que es monótona decreciente.

$$a_{n+1} - a_n = r^{n+1} - r^n = \underbrace{r^n}_{>0} \underbrace{(r-1)}_{<0} < 0$$

$$a_{n+1} < a_n$$

$\therefore (a_n)$ es decreciente

Esto quiere decir que, como (a_n) es acotada y monótona, es una sucesión convergente por teorema (4.)

Ejemplos:

La sucesión $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$ es acotada y monótona, luego por teorema converge.

La sucesión $(b_n) = (2^{n!})$ es monótona creciente, pero no es acotada; por lo tanto diverge.

La sucesión $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$ es acotada, pero no es monótona, esta sucesión no converge.

TEOREMAS

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$; $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = ka$; $k = \text{cte.}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$

Demostración:

1. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$\text{tales que } n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{y } n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$
y $n > n_2$

Luego,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

Ejemplo:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{2}{3}$

Halle el valor al cual converge

$$d_n = \frac{5a_n + 3a_n b_n}{4c_n}$$

Resolución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n + 3a_n b_n}{4c_n}$$

Aplicando los teoremas

$$= \frac{5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{4 \lim_{n \rightarrow \infty} c_n}$$

Reemplazando

$$= \frac{5(5) + 3(5)(-4)}{4\left(\frac{2}{3}\right)} = -\frac{105}{8}$$

SUCESIONES DIVERGENTES

Son aquellas sucesiones cuyo límite de su término n -ésimo es infinito positivo o negativo. Se debe enfatizar que $+\infty$ y $-\infty$ no son números.

TEOREMAS

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y (b_n) es acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y existe $c > 0$ tal que $b_n > c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$
3. Si $a_n > c > 0, b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$
4. Si (a_n) está acotada y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS

CASOS DE INDETERMINACIÓN

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones, las indeterminaciones pueden presentarse en las siguientes formas:

Operación	Representación simbólica
$\frac{a_n}{b_n}$, si $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$	$\frac{0}{0}$
$\frac{a_n}{b_n}$, si $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$a_n b_n$, si $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow \infty$	$0 \cdot \infty$
$a_n - b_n$, si $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow \infty$	$\infty - \infty$
$a_n^{b_n}$, si $a_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$	0^0
$a_n^{b_n}$, si $a_n \rightarrow \infty$ y $b_n \rightarrow 0$	∞^0
$a_n^{b_n}$, si $a_n \rightarrow 1$ y $b_n \rightarrow \infty$	1^∞

1. Como a_n y b_n son funciones cuyo dominio es \mathbb{N} , el cálculo de sus límites también tienen sentido para los valores reales de n (no naturales), entonces en algunos casos de

indeterminación como $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ podemos utilizar la regla de L'Hospital.

Ejemplo:

$$\text{Si } a_n = \frac{L_n n}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Por L'Hospital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

2. Límite de una expresión racional, $\frac{a_n}{b_n}$,

$$\text{supongamos que } \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}$$

con $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, p, q \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{si } p = q \\ 0, & \text{si } p < q \\ \infty, & \text{si } p > q \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcule los siguientes límites:

$$I. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n + 4}{3n^3 + 6} = \frac{7}{3}$$

Puesto que el numerador y denominador son del mismo grado, entonces se dividen los coeficientes principales.

$$II. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3}{n+n^2+n^3+n^4} = 0$$

Ya que el denominador es de mayor grado que el numerador. El límite es cero.

3. Límite de expresiones exponenciales: $a_n^{b_n}$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281...$$

y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$, podemos resolver

los límites de la forma 1^∞ .

En general, los límites de la forma 1^∞ , pueden resolverse, también, teniendo en cuenta que su valor es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n}$$

Los límites de la forma exponencial, se resuelven, en general, tomando logaritmos neperianos:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} \Rightarrow \ln(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n^{b_n})$$

Ejemplos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3}\right)^{n+2} \approx 1^\infty$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2 + 3} - 1\right)(n+2)}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+2)}{n^2 + 3}} = e^0 = 1$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} \approx \infty^0$$

No podemos aplicar el método anterior, pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} \right]$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right)$$

$$= \underbrace{\left(e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} \right)}_{\text{Por L'Hospital}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \left(e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{n^2}}$$

$$= (e^0) \left(e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= e^0 \cdot e^0 = 1$$

4. El cálculo de límites se simplifica si se tiene en cuenta las siguientes equivalencias (son expresiones equivalentes, aquellas cuyas relaciones por cociente tienden a 1).

Expresión	Equivalente
$n!$	$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, si $n \rightarrow \infty$ (fórmula de Stirling)
$a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p$	$a_0 n^p$, $n \rightarrow \infty$
$\ln(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p)$	$\ln(n^p)$, $n \rightarrow \infty$
$\text{sen}(a_n) \sim a_n \sim \text{arc sen } a_n \sim \text{arc tg } a_n$ $a_n \rightarrow 0$	
$1 - \cos a_n$	$\frac{a_n^2}{2}$, $a_n \rightarrow 0$
$\ln(1 + a_n)$	a_n , si $a_n \rightarrow 0$
$a_n - 1$	$\ln(a_n)$, si $a_n \rightarrow 1$



La sustitución de un infinito o infinitésimo por una expresión equivalente es sólo correcta cuando aquél aparece exclusivamente, como factor o divisor.

Ejemplo:

Calcular:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 2n^2 + n + 5) \operatorname{sen}(n^2 + n + 2)}{\left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)(2n + n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3)(n^2 + n + 2)}{\left(\frac{1}{2n^2}\right)(n^7)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^3)(n^2)}{n^5} = 2
 \end{aligned}$$



Si $k \in \mathbb{N}$ y se cumple

$$n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

El símbolo " \ll " quiere decir "es una fracción muy pequeña de" o "es insignificante en comparación con".

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! = \lim_{n \rightarrow \infty} n^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

CRITERIO DEL EMPAREDADO O PRINCIPIO DE ENCAJE DE CANTOR

Sean (a_n) , (b_n) y (c_n) sucesiones de números reales tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ y $a_n \leq b_n \leq c_n$

para todo número natural n suficientemente grande, entonces la sucesión (b_n) tiene límite que coincide con las otras dos sucesiones, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Demostración

De la hipótesis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \equiv L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

$$\Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon \equiv L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$$

Luego, $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$ se cumplirá

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

$$\text{es decir} \quad a - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$$

$$- \varepsilon < b_n - L < \varepsilon$$

Por lo tanto, $|b_n - L| < \varepsilon$ y así $\lim b_n = L$

Ejemplo:

$$\text{Determinar } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

Resolución:

$$\text{Sabemos que } 0 < 2^n < 3^n$$

$$3^n < 2^n + 3^n < 2 \cdot 3^n$$

$$\sqrt[n]{3^n} < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < 3 \sqrt[n]{2}$$

Hallemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 3 \cdot 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 3 \cdot 2^0 = 3$$

Aplicando el criterio del emparedado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$$

Ejemplo:

Calcular el valor al cual converge (a_n) si $a_n = \frac{\operatorname{senn} n}{n}$

Resolución:

Utilizando la desigualdad $-1 \leq \operatorname{senn} n \leq 1$

$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{a_n} \leq \frac{\operatorname{senn} n}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{senn} n}{n} = 0$$

TEOREMA DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Sea (a_n) una sucesión convergente.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = a$

Demostración

De la hipótesis tenemos que (a_n) converge a $a \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ entonces } a_i = a + r_i, i \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{luego, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a + r_1) + (a + r_2) + \dots + (a + r_n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na + r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} = a + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n}}_0 \end{aligned}$$

$$= a + 0 = a$$

Observación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_n}{n} = 0 \text{ ya que } r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

TEOREMA DE LA MEDIA GEOMÉTRICA

Sea (a_n) una sucesión convergente

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
 entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n} = a$

Ejercicio:

Calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

Resolución:

Rápidamente nos podemos dar cuenta que podemos aplicar el teorema de la media aritmética para la sucesión (a_n) donde $a_n = \sqrt[n]{n}$, $a_1 = 1$.

Calculemos entonces el límite de su término enésimo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n \frac{1}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}}$$

Por la regla de L'Hospital

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1$$

Por el teorema de la media aritmética.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$$

Demostración

Sea $x = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$

$$\ln x = \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

$$\ln x = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}$$

Tomemos límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} \right)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$

Aplicando el teorema de la media aritmética en el segundo miembro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln a_n)$$

Ingresando el límite

$$\ln(\lim_{n \rightarrow \infty} x) = \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Por hipótesis: $\lim_{n \rightarrow \infty} x = a$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = a$$

Ejercicio:

Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

Resolución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(1)(2)(3)\dots(n)}$$

Podemos aplicar el teorema de la media geométrica

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

CRITERIOS PARA DETERMINAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

1. CRITERIO DE LA RAZÓN

Sea la sucesión (a_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$

- a) Si $r < 1$ entonces la sucesión converge a cero.
- b) Si $r = 1$ entonces no podemos afirmar si converge o diverge
- c) Si $r > 1$ entonces la sucesión diverge

Demostración:

a) Sea la sucesión (a_n) de la hipótesis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r < 1$$

entonces

$$\exists N \in \mathbb{N} / \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r \text{ siempre que } n > N$$

Sea p cualquier entero positivo mayor que N , entonces:

$$|a_{p+1}| < r |a_p|$$

$$|a_{p+2}| < r |a_{p+1}| < r^2 |a_p|$$

⋮

$$|a_{p+k}| < r^k |a_p|$$

es decir,

$$-r^k |a_p| < a_{p+k} < r^k |a_p|$$

Si $r \in (0, 1)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$. Por tanto, aplicando

el teorema del emparedado.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{p+k} = 0, \text{ así que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Ejemplos:

- Si $a_n = 2^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}}{2^n} \right| = 2 > 1$$

\therefore la sucesión (a_n) diverge.

- Si $a_n = \frac{n}{e^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{ne} \right| = \frac{1}{e} < 1$$

\therefore la sucesión (a_n) converge en cero.

2. CRITERIO DE STOLZ-CESARO

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tal que:

I. (b_n) es monótona y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ o

II. (b_n) es monótona y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$,

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.

Demostración:

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = c$.

Como (b_n) es monótona, es suficiente probarlo cuando sea decreciente, es decir $b_n - b_{n+1} > 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, existe un número natural N tal que:

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N$$

$$\left| \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N$$

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < c + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N$$

por ser $b_n - b_{n+1} > 0$, por hipótesis, tenemos:

$$\left(c - \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < \left(c + \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_n - b_{n+1}), \quad \forall n > N$$

relación que, tras aplicarse a $n, n+1, \dots, m$ (con $m > n \geq n_0$) y sumar todas las expresiones obtenidas, da:

$$\left(c - \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_n - b_m) < a_n - a_m < \left(c + \frac{\varepsilon}{2} \right) (b_n - b_m)$$

y tomando límites en los tres miembros, respecto de m , para n fijo (con $n \geq n_0$) y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} b_m = 0$$

$$\left(c - \frac{\varepsilon}{2} \right) b_n \leq a_n \leq \left(c + \frac{\varepsilon}{2} \right) b_n$$

con lo cual, dividiendo por b_n (que es positivo por ser b_n decreciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$) el sentido de la

desigualdad se mantiene y queda:

$$c - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$

de donde

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Luego, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

Ejemplo:

Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{2+2^2} + \dots + \sqrt{n+n^2}}{n^2 + 2}$

Resolución:

$$a_n = \sqrt{1+1^2} + \sqrt{2+2^2} + \dots + \sqrt{n+n^2}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{1+1^2} + \sqrt{2+2^2} + \dots$$

$$\dots + \sqrt{n+n^2} + \sqrt{n+1+(n+1)^2}$$

$$b_n = n^2 + 2 \Rightarrow b_{n+1} = (n+1)^2 + 2$$

Como (b_n) es monótona creciente y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$,

podemos aplicar el Criterio de Stolz-Cesaro, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1+(n+1)^2}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}{\frac{2n + 1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

3. SUCESIONES DE CAUCHY

El concepto de límite finito expresa que los términos de una sucesión convergente no tienen una localización dispersa, sino que se concentran alrededor del límite como si éste fuera una especie de núcleo. Entonces, al acercarse a él, los términos se aproximan “infinitamente” unos a otros; lo interesante es que este hecho (llamado condición de Cauchy) basta, por sí solo para asegurar la existencia del límite finito.

Por otra parte, puede darse la posibilidad de que existan varios de esos núcleos (que se llaman puntos adherentes), como ocurre, en particular, en las sucesiones acotadas, concentrándose en torno a cada uno de ellos un sector infinito de la sucesión (subsucesión).

Formulemos matemáticamente alguna de estas ideas.

Definición

Se dice que un número real r es adherente (o punto adherente) a una sucesión dada si existe una subsucesión de esta que converge a r .

Corolario

Todo sucesión acotada admite, al menos un punto adherente.

Ejemplo:

Sea la sucesión (a_n) con $a_n = (-1)^n$ y sus puntos adherentes sean el 1 y el -1. Las subsucesiones serán:

$$a_{2n}: 1, 1, 1, \dots, 1, \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$$

$$a_{2n-1}: -1, -1, -1, \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1$$

Definición

Se dice que una sucesión de números reales (a_n) es de Cauchy cuando $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq N$$

Ejemplo:

Demostrar que la sucesión (a_n) , con $a_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy.

Sabemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \equiv \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N > 0 \left/ \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right. \forall n > N$$

Ahora veamos que

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n, m > N = \frac{1}{\varepsilon}$$

Por lo tanto, la sucesión (a_n) es una sucesión de Cauchy.

Proposiciones:

1. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.
2. Toda sucesión de Cauchy tiene límite.
3. Toda sucesión de Cauchy definida en el conjunto de los números reales es convergente.
4. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

Demostración:

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Se tiene que dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, siendo N un número natural que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N$$

Veamos:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| +$$

$$+ |a + a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall n \geq N \text{ y } \forall m > N$$

Por lo tanto, (a_n) es una sucesión de Cauchy.

4. Tomemos $\varepsilon = 1$, entonces por definición si (a_n) es de Cauchy, debe existir un N natural tal que:

$$|a_n - a_m| < 1, \forall n \geq N \text{ y } \forall m \geq N$$

En particular:

$$|a_n - a_N| < 1, \forall n \geq N \text{ y debido a ello}$$

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1, \forall n \geq N$$

con lo cual $a_N - 1$ y $a_N + 1$ son, respectivamente, una cota superior y una cota inferior del conjunto $\{a_n : n \geq n_0\}$; es decir, este conjunto es acotado.

Por otra parte, $\{a_n : n = 1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ es finito y, por lo tanto, acotado, luego $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es reunión de dos acotados, será también acotado.

SERIES NUMÉRICAS

Notación

Sea la sucesión (a_n) , si deseáramos expresar la suma de los 10 primeros términos de esta sucesión, entonces usaremos la siguiente notación:

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$$

Si queremos representar la suma de todos sus elementos, se escribe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Sabemos que no es posible sumar infinitos números, pero damos significado a este proceso mediante la operación de paso al límite. Este es un ejemplo típico del modo cómo las matemáticas generalizan conceptos conocidos para acrementar su utilidad.

En la notación $\sum_{k=1}^n a_k$, el índice k no tiene significado propio alguno, y puede ser sustituido por otro cualquiera, es decir:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=2}^n a_{k-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

A este tipo de índices se les llama índices mudos. También se puede hacer la siguiente asociación: a_0 representa el primer elemento; a_1 el segundo elemento, y así sucesivamente, obteniendo:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$



El símbolo $\sum_{k=1}^n a_k$ ó $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no representa el resultado de la suma de estos números, sino la operación que se efectúa sobre ellos.

DEFINICIÓN

Una serie es la adición de todos los términos de la sucesión (a_n) y se denota mediante el símbolo: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. También podemos usar las siguientes notaciones:

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE UNA SERIE

Sea la sucesión (a_n) de números reales, a partir de ella, formaremos una nueva sucesión (S_n) , donde:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \text{ etc.}$$

Los números S_n se llaman sumas parciales de la serie $\sum a_n$ y a (S_n) se le denomina sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_n$.

Definición

La serie $\sum a_n$ es convergente si y sólo si la sucesión de sumas parciales tiene límite finito, a

este límite $\left(S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \right)$ se le deno-

mina suma de la serie. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ o no existe se dice que $\sum a_n$ es una serie divergente.

Nuestro objetivo principal en este capítulo es determinar si una serie es convergente o divergente.

A continuación veamos algunos ejemplos de series convergentes y divergentes:

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots,$$

por simple inspección podemos decir que esta suma es $+\infty$; por lo tanto, la serie diverge.

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log k = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos kx = 1 + \cos x + \cos 2x + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \dots$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$,
es divergente ya que la suma parcial
- $$\begin{cases} S_n = 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ S_n = 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$
- por lo tanto, no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

3. Para un decimal periódico

$$0,666\dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \dots$$

las sumas parciales son:

$$S_1 = \frac{6}{10}$$

$$S_2 = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2}$$

⋮

$$S_n = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \dots + \frac{6}{10^n}$$

Hallemos la forma simplificada de esta enésima suma parcial, así:

$$S_n = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \dots + \frac{6}{10^n}$$

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots + \frac{6}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10} S_n = \frac{6}{10} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

$$S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$,

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}$

Por lo tanto esta serie converge, es decir

$$0,666... \cong \frac{2}{3}$$

Las fracciones decimales periódicas son casos particulares de la serie geométrica.

Definición

Una serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots, r \neq 0, a \neq 0$$

recibe el nombre de serie geométrica, cuya razón es r . Veamos en qué casos esta serie converge o diverge. Calculemos la n -ésima suma parcial de la serie.

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = a(1-r^n) \end{array}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

Si $r=1$, $S_n=na$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ la serie diverge

Si $|r| > 1$, $r^n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ la serie diverge

Si $|r| < 1$, $r^n \rightarrow 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ la serie converge

Con lo cual queda probado el siguiente teorema:

TEOREMA

Si $|r| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ converge

y tiene por suma $\frac{a}{1-r}$. Si $|r| \geq 1$, la serie diverge.

Ejemplos:

- Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

- Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{e}\right)^n = \frac{\pi}{e} + \left(\frac{\pi}{e}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{e}\right)^3 + \dots = \infty$$

ya que $\frac{\pi}{e} > 1$



Cuando la serie geométrica es convergente, calcular su suma es sencillo.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ S &= 1 + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

Si aplicamos este método en una serie divergente, obtendremos un absurdo.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 3^n &= 3 + 3^2 + 3^3 + \dots \\ S &= 3 + 3(3 + 3^2 + 3^3 + \dots) \\ &= 3 + 3S \\ S &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio:

Se deja caer una pelota desde una altura de a metros sobre un piso horizontal, cada vez que la pelota choca contra el suelo, rebota hasta alcanzar la altura ar , siendo r un número positivo menor que 1. Halle la distancia (vertical) total recorrida por la pelota.

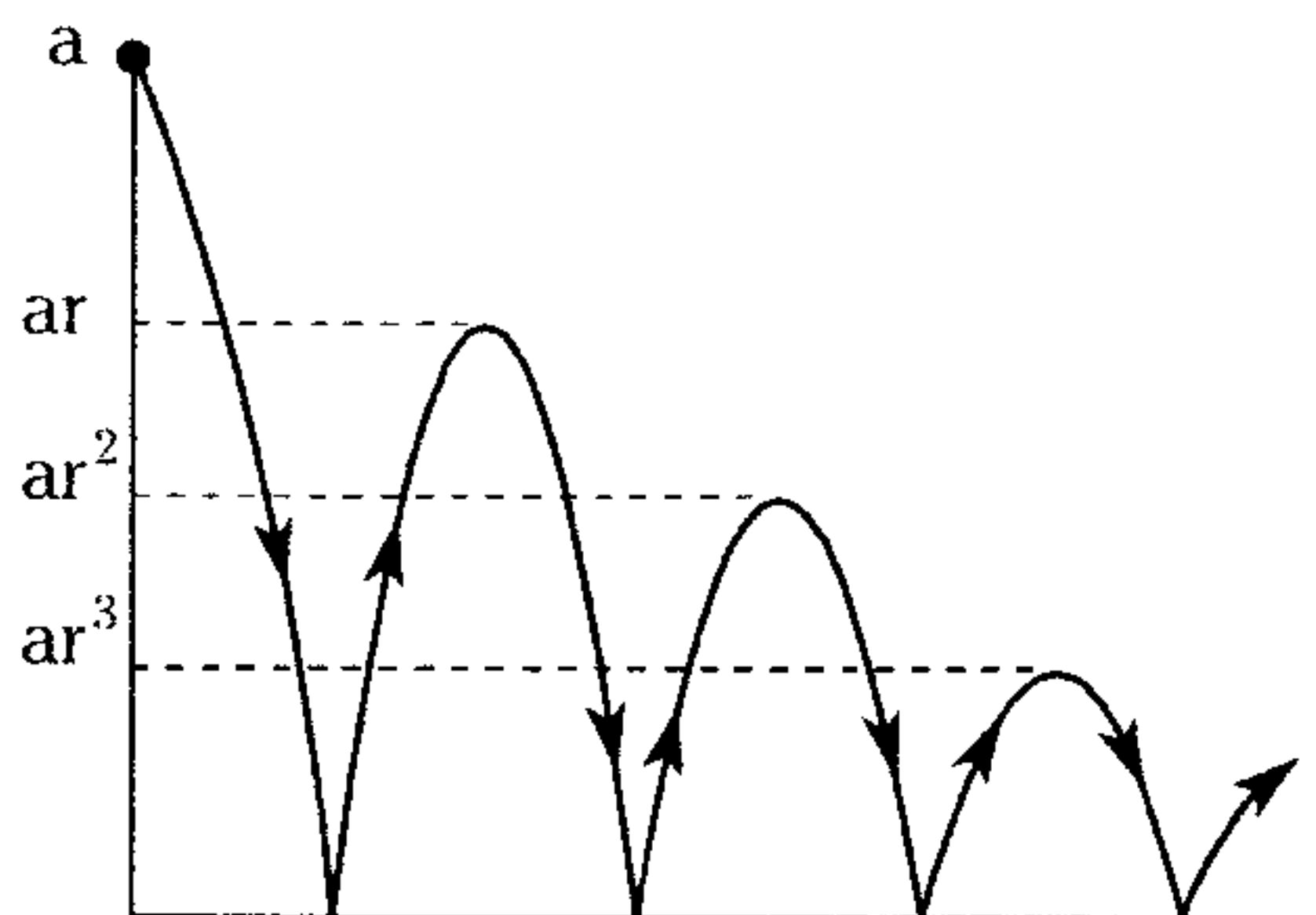
Resolución:

La distancia total recorrida está dada por la serie:

$$S = a + 2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \dots$$

Como $r < 1$, entonces es la serie geométrica conocida a partir del segundo término.

$$S = a + \frac{2ar}{1-r} = a \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$



Por ejemplo, si $a = 5$ m y $r = \frac{1}{3}$ m, la distancia

$$\text{recorrida es: } S = 5 \left(\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right) = 10 \text{ m}$$

También podemos aproximar el valor de un decimal periódico como una serie geométrica, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 0,333\dots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Definición

Una serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

es denominada serie armónica, esta serie es divergente.

Definición

Sea $S(x)$ una expresión matemática, la serie telescópica presenta la siguiente forma general:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [S_n - S_{n+1}]$$

la enésima suma parcial de la serie está dada por:

$$\sum_{i=1}^n [S_{(i)} - S_{(i+1)}] = S_1 - S_{n+1}$$

Este resultado lo obtenemos desarrollando los términos.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n S_{(i)} - S_{(i+1)} &= S_1 - \cancel{S_2} - \cancel{S_3} - \cancel{S_4} + \dots + \cancel{S_n} - S_{n+1} \\ &= S_1 - S_{n+1} \end{aligned}$$

Ejercicios

- $\sum_{n=1}^{20} n^2 - (n+1)^2 = 1^2 - 21^2 = -440$
- $\sum_{n=1}^{99} \log n - \log(n+1) = \log 1 - \log 100 = -2$

Ejercicio

Determinar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Resolución:

Halleemos la k -ésima suma parcial

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Aplicando la serie telescópica $= 1 - \frac{1}{k+1}$,

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

luego, esta serie converge a 1.

Ejercicio:

Sea la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$, averiguar la convergencia o divergencia de la serie.

Resolución:

Halleemos la n -ésima suma parcial.

Sabemos que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$

entonces, $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$

$$-\sum_{k=1}^n ((k - (k+1))^3) = 3\sum_{k=1}^n k^2 + 3\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

por serie telescópica

$$-(1 - (n+1)^3) = 3\sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

Operando $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left\{ (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n \right\}$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tomando límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 \approx \infty$$

\therefore la serie diverge a $+\infty$

Propiedades de la Sumatoria

$$\sum_{n=1}^m k S_n = k \sum_{n=1}^m S_n, \quad k: \text{constante } m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^m S_n \pm u_n = \sum_{n=1}^m S_n \pm \sum_{n=1}^m u_n$$

CRITERIOS PARA DETERMINAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE UNA SERIE

Anteriormente hemos podido determinar la convergencia o divergencia de una serie tomando límite ($n \rightarrow \infty$) a su n -ésima suma parcial. Si nos resultaba un límite finito, entonces la serie convergía a este límite; pero si no salía infinito, divergía; es muchas veces difícil calcular su n -ésima suma parcial, por ello vamos a dar a continuación varios criterios que permitirán determinar si una serie dada converge; tales criterios dependen principalmente de la estructura de los términos de la serie, más que de su suma.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, entonces la serie diverge

Ejemplo:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1}$ posee como término n -ésimo a $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \neq 0$, entonces la serie diverge.

TEOREMA

Una condición necesaria para la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$
Demostración

Sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ la n -ésima suma parcial de la serie, y supongamos que esta converge hacia S ; es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

Entonces, dado un número ε existe un índice N tal que todos los términos de la sucesión (S_n) posteriores al n -ésimo quedan comprendidos entre $S - \frac{\varepsilon}{2}$ y $S + \frac{\varepsilon}{2}$, por consiguiente, dos cualesquiera de ellos no puede diferir entre sí en más de ε . O sea, que si m y n son ambos mayores que N ,

$$|S_n - S_m| < \varepsilon.$$

En particular, esta desigualdad se satisface si $m=n-1$ y $n>N+1$.

Pero

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

por tanto, $|a_n| < \varepsilon$ cuando $n > N+1$, puesto que ε es un número positivo arbitrario, esto significa que: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, con lo cual queda demostrado el teorema, además esta demostración permite afirmar que el criterio anterior es correcto.



De lo anterior podemos afirmar las siguientes proposiciones:

- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ la serie $\sum a_n$ no necesariamente converge, es decir, puede ser convergente o divergente.

Ejemplo 1

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)n+1}{2n-3}$ es convergente, determine el valor que puede tomar $x \in \mathbb{R}$.

Resolución:

Como la serie es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x^2-1)n+1}{2n-3} = 0$$

Por propiedad de límites, dividimos los coeficientes

$$\text{principales, es decir } \frac{x^2-1}{2} = 0$$

Por lo tanto, $x=1$ ó $x=-1$

Ejemplo 2

En la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, entonces no podemos afirmar si converge o diverge.

Propiedades

- Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen a A y B respectivamente y sea c una constante ($c \in \mathbb{R}$), entonces:
 - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a cA.
 - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a $A \pm B$.
- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente y $c \in \mathbb{R}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ es divergente.
- Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es divergente.

Ejemplo:

Averiguar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+n+1}{2n^2-1} + \frac{5}{2^n} \right)$$

Resolución:

Aplicamos las propiedades anteriores

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+n+1}{2n^2-1} + \frac{5}{2^n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{2n^2-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{2n^2-1} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2} + 5 \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right) = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

1. CRITERIO DE CONDENSACIÓN DE CAUCHY

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal

que $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$; entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

converge (o diverge) si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge (o diverge).

Demostración:

Sea S_n la enésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\left(S_n = \sum_{k=1}^n a_k \right)$$

Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y

sea $P \in \mathbb{R}$ una cota superior de la sucesión (S_n) .

Se tiene, siendo t_n la enésima suma parcial de

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^n 2^k a_{(2^k)} = 2a_2 + (2a_4 + 2a_4) + \\ &\quad (2a_8 + 2a_8 + 2a_8 + 2a_8) + \\ &\quad + \dots + (2a_{2^n} + 2a_{2^n} + \dots + 2a_{2^n}) \end{aligned}$$

ya que $a_n \geq a_{n+1}$, entonces

$$\begin{aligned} &\leq 2a_2 + (2a_3 + 2a_4) + (2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8) + \dots \\ &\quad + (2a_{2^{n-1}+1} + 2a_{2^{n-1}+2} + \dots + 2a_{2^n}) \\ &= 2S_{2^n} - 2a_1 \leq 2P - 2a_1 \end{aligned}$$

Luego, la sucesión (t_n) es acotada superiormente, como además esta serie es monótona

decreciente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente.

Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ es convergente, entonces la sucesión de sus sumas parciales está acotada superiormente. Sea M una cota superior, escojamos un n_0 tal que $2^{n_0+1} - 1 \geq n$ entonces:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2^{n_0+1}} \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \\ &\quad + (a_{2^{n_0}} + a_{2^{n_0}+1} + \dots + a_{2^{n_0+1}-1}) \end{aligned}$$

Luego, la sucesión (S_n) es acotada y como es también monótona, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo:

Determinar si la serie armónica es convergente o divergente.

Resolución:

En $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se tiene que $a_n = \frac{1}{n}$ y como $a_n > a_{n+1}$

$\left(\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \right)$, entonces podemos aplicar el criterio anterior, es decir, como la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

diverge entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Las P-series

Sea la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots$$

Si $p > 1$ la serie converge

Si $p \leq 1$ la serie diverge

Demostración

La relación $\underbrace{\frac{1}{(n+1)^p}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{a_n}$ nos permite aplicar el

criterio de condensación de Cauchy y así, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ es convergente si y sólo si lo es } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$$

la última es una serie geométrica de razón 2^{1-p} , entonces será convergente si y sólo si:

$$\begin{aligned} 2^{1-p} &< 1 \\ 2^{1-p} &< 2^0 \\ 1-p &< 0 \\ p &> 1 \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que es divergente cuando $p \leq 1$.

Ejemplo:

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ diverge

3. Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Resolución:

Tenemos que $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, se cumple que $a_n > a_{n+1}$, entonces veamos la serie.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n \ln 2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{divergente}} \end{aligned}$$

Luego, por el criterio de condensación de

Cauchy la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ es divergente.

4. Analizar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

Resolución:

Como en el caso anterior $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$

Veamos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln 2)^p}$$

$$\frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ luego si } p > 1 \text{ converge,}$$

si $p < 1$ diverge

Por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ converge,

pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge.

2. CRITERIO DE COMPARACIÓN

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos

positivos, si $a_n \leq b_n$ para todo n suficientemente grande, entonces se cumple:

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración:

a) Tenemos que $a_n \leq b_n \quad \forall n > N$ con $N \in \mathbb{N}$,

supongamos además que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, entonces:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=N+1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=N+1}^n b_k \leq \underbrace{\sum_{k=1}^N a_k + b}_{\# \text{ real}} \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la sucesión (S_n) está acotada y como es de términos positivos es monótona creciente; por lo tanto, la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Demostremoslo por contradicción, supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n \quad \forall n > N$, entonces por el teorema anterior $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente lo cual contradice nuestra hipótesis.

Ejemplo 1

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3 + n}$ converge.

Resolución:

Sabemos que $\underbrace{\frac{\cos n}{n^3 + n}}_{a_n} < \frac{1}{n^3 + n} < \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{b_n}$

Como $a_n < b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplo 2

¿Converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + n}{\ln n}$?

Resolución:

Veamos

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n} + n}{\ln n}}_{b_n} > \frac{\sqrt{n}}{\ln n} > \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}_{a_n}$$

Tenemos que $a_n < b_n$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Corolario

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos.

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ ó ∞ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración:

a) Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0$, existe un

número N tal que $\frac{a_n}{b_n} < c + 1$ siempre que $n > N$.

Luego, $a_n < (c + 1)b_n$. Por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (c + 1)b_n$ converge, por lo tanto aplicando el criterio de comparación

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplo:

Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n^4 - 2}$

Resolución:

Para aplicar el criterio anterior consideremos

$$a_n = \frac{n^3}{5n^4 - 2} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Veamos a qué es igual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{5n^4 - 2} = \frac{1}{5} > 0$$

Por lo tanto, por la parte (b) del corolario la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

3. SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice absolutamente

convergente cuando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Ejemplo:

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es absolutamente

convergente, ya que $|r^n| = |r|^n$, con $|r| < 1$.



Una serie convergente cuyos términos son todos del mismo signo es absolutamente convergente.

TEOREMA

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Pero no toda serie convergente es absolutamente convergente.

TEOREMA

Una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, se llama condicionalmente convergente.

4. CRITERIO DE LAS SERIES ALTERNANTES (LEIBNIZ)

Sea (a_n) es una sucesión no creciente de términos positivos y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ converge.}$$

Demostración:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k = S_n, \text{ entonces:}$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} - a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

(S_{2n}) es una sucesión no decreciente y (S_{2n-1}) es una sucesión no creciente. Además:

$$S_2 \leq S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} < S_{2n-1} \leq S_1$$

Luego (s_{2n}) está acotada superiormente por S_1 y (S_{2n-1}) está acotada inferiormente por S_2 . Por tanto, (S_{2n}) y (S_{2n-1}) convergen.

Como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n-1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$$

Estas 2 sucesiones convergen al mismo punto, llamémosle c .

$$\text{Luego } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = c$$

Ejemplo 1

Un ejemplo clásico es la serie anarmónica

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, en este caso $a_n = \frac{1}{n}$, por tanto la

sucesión (a_n) es no creciente y de términos positivos, además $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ con lo cual

podemos afirmar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente.

La serie anarmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente,

pero no es absolutamente convergente, ya que

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica que es

divergente. Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es

condicionalmente convergente.

Ejemplo 2

Determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Resolución:

En este caso

$$a_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \log 1 = 0$$

Además, la sucesión $(a_n) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ es decreciente.

Por lo tanto por el criterio de las series alternantes

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ es convergente.

5. CRITERIO DE LA RAZÓN O DE D'ALEMBERT

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ entonces:

- I. Si $r < 1$ la serie converge.
- II. Si $r > 1$ la serie diverge.
- III. Si $r = 1$ no se puede afirmar si converge o diverge.

Demostración:

Consideremos una r tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r < 1$,

entonces $\exists N / \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r$ siempre que $n > N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{r^{n+1}}{r^n} \quad \forall n > N$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{r^{n+1}} \leq \frac{|a_n|}{r^n} \quad \forall n > N$$

Por lo tanto, para un n suficientemente grande,

$\left(\frac{|a_n|}{r^n} \right)$ es una sucesión no creciente de términos positivos, entonces es acotada.

Luego, $\exists b / \forall n > N, \frac{|a_n|}{r^n} \leq b$
 $|a_n| \leq br^n$

Como $r \in <0, 1>$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} br^n$ converge, por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge; esto quiere decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, por lo tanto es convergente.

Ejemplos:

Determine la convergencia de las siguientes series:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ de aquí $a_n = \frac{3^n}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$,

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} n!}{(n+1)! 3^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3}{n+1} \right| = 0 < 1$$

\therefore la serie dada converge.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{\sqrt{n^2+1}}$ sabemos que $a_n = \frac{\pi^n}{\sqrt{n^2+1}}$ y

$$a_{n+1} = \frac{\pi^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}},$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\pi^{n+1} \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1} \pi^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \pi \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}} \right|$$

$$= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}} \right| = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \right)$$

$$= \pi(1) = \pi > 1$$

\therefore la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge

3. En las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ no podemos afirmar nada con este criterio ya que la primera, por ejemplo diverge y la segunda converge.

6. CRITERIO DE LA RAÍZ O DE CAUCHY

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$

- I. Si $r < 1$, entonces la serie converge.
- II. Si $r > 1$, entonces la serie diverge.
- III. Si $r = 1$, entonces no podemos afirmar si la serie converge o diverge.

Demostración:

- I. Consideremos un número r tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq r < 1,$$

entonces $\exists N / \sqrt[n]{|a_n|} \leq r \quad \forall n > N$, es decir,
 $|a_n| < r^n \quad \forall n > N$.

Como $r \in <0, 1>$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge, por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplos:

Determine la convergencia de las siguientes series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+5}{7n-1} \right)^n$

Veamos a que es igual el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3n+5}{7n-1} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{7n-1} = \frac{3}{7} < 1$$

\therefore la serie dada converge.

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^{\frac{2}{n}} - 1}{2} \right)^{2n}$$

Calculemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| n^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{2} \right|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| n^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{2} \right|^2 \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{n}} - \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln n^{\frac{2}{n}}} - \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2 \ln n}{n}} - \frac{1}{2} \right|^2 \\ &= \left| e^{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}} - \frac{1}{2} \right|^2 \end{aligned}$$

Aplicando L'Hospital

$$= \left| e^{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \right|^2 = \left| e^0 - \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} < 1$$

\therefore la serie dada converge.

7. CRITERIO DE RAABE

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos.

Sea $r = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$ entonces

Si $r > 1$, la serie converge

Si $r < 1$, la serie diverge

Si $r = 1$, no se puede afirmar nada

Ejemplos:

Determinar la convergencia de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

Resolución:

La serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$

$$= \frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \dots + \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{a_n}} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+2} = 2 > 1$$

\therefore la serie dada converge.

8. CRITERIO DE PRINGSHEIM

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Si $\exists \alpha > 1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = r$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$

entonces la serie converge.

Si $\exists \alpha \leq 1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = r$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$

entonces la serie diverge.

Ejemplos:

Analizar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n^2 + 5}$

Veamos $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^3 + 2n^2 + 5}$ vemos que

si $\alpha = 3$ este límite es igual a $1 \neq 0$, entonces esta serie converge.

SUCESIONES DE FUNCIONES

Es un conjunto de funciones, en el cual a cada función f_n es posible asociarse a un número natural n , es decir, una sucesión de funciones es un conjunto infinito numerable de funciones.

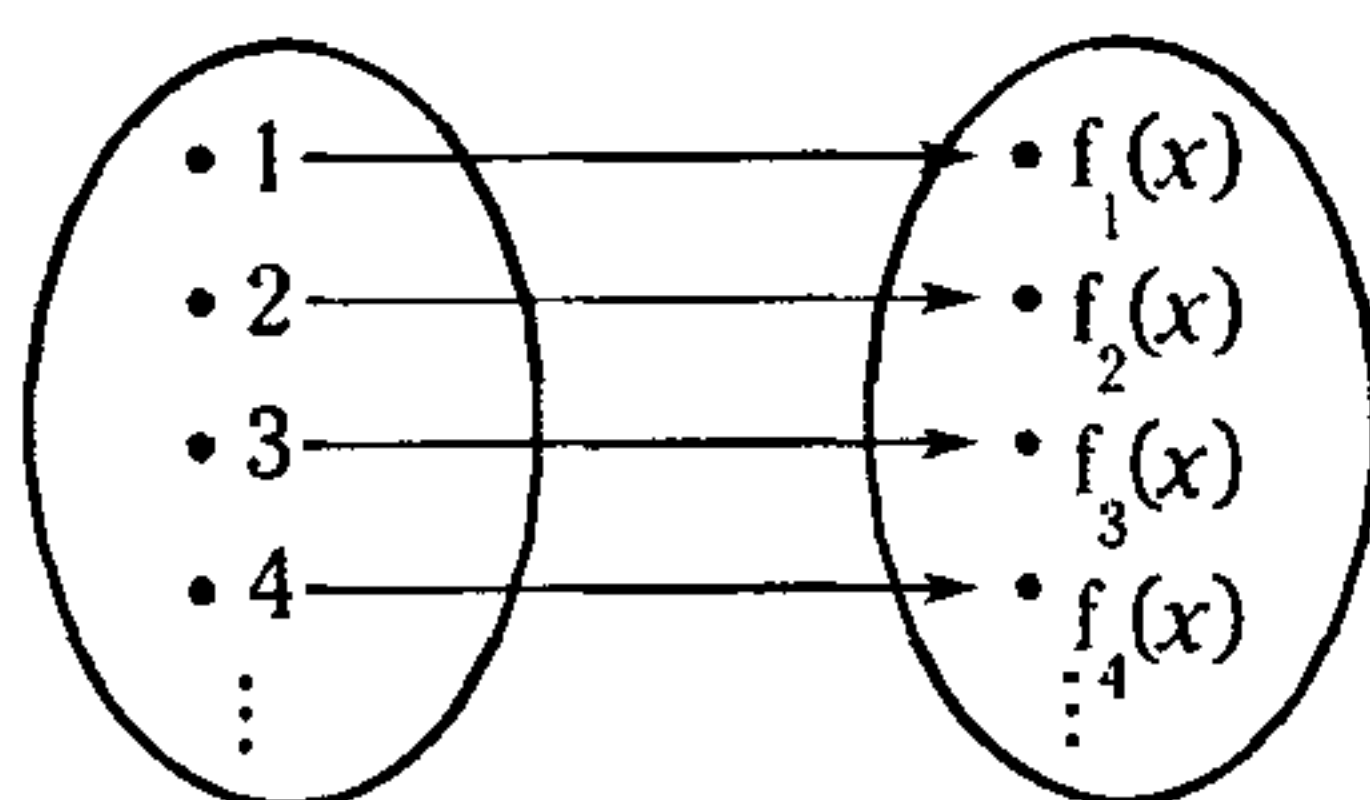
Ejemplos

1. Si $f_n(x) = nx$, entonces

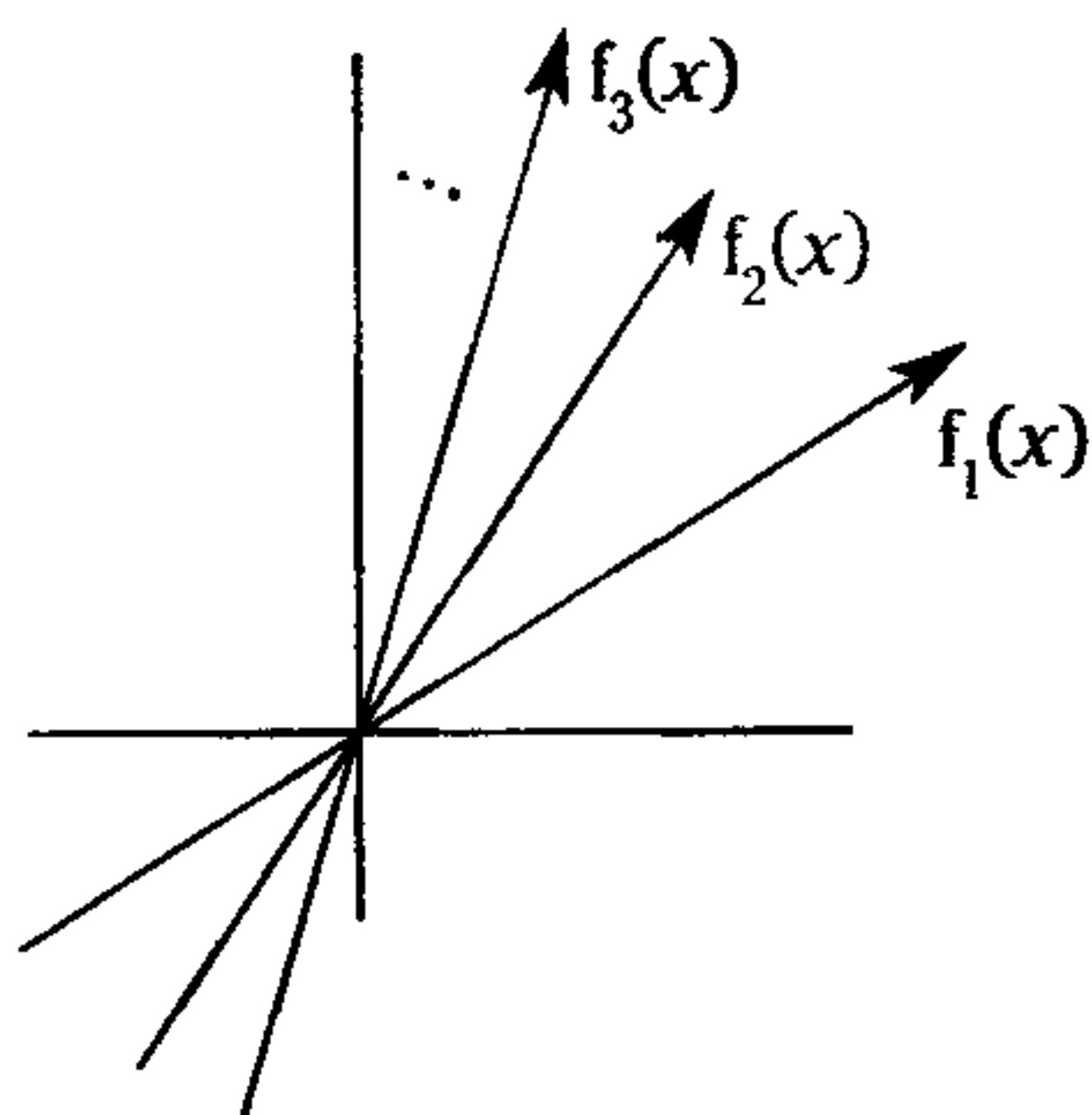
$$\{f_n(x)\}: f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

$$\{f_n(x)\}: x, 2x, 3x, \dots$$

Observemos la correspondencia de esta sucesión con \mathbb{N} en el diagrama de Venn.



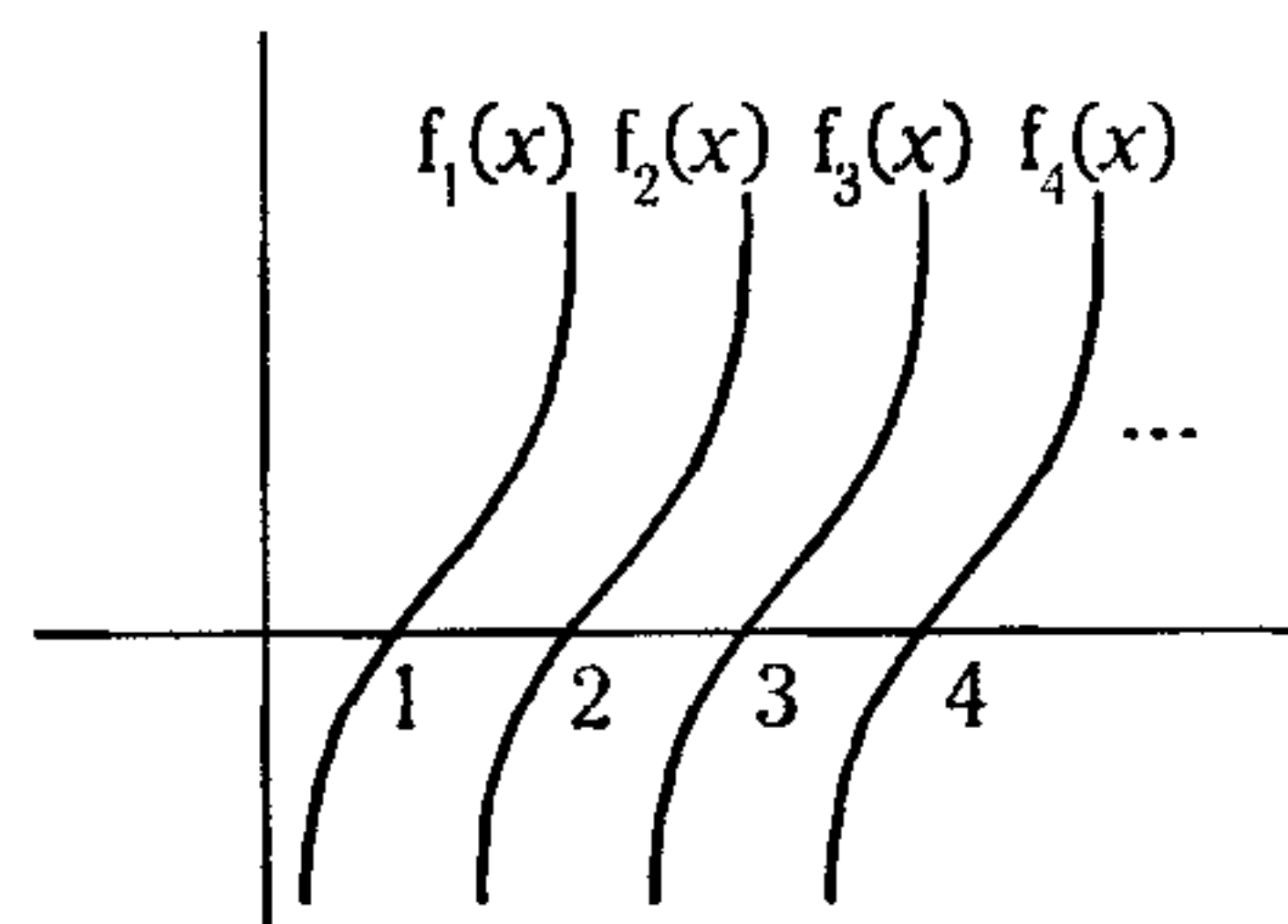
Grafiquemos esta sucesión de funciones.



2. Si $f_n(x) = (x-n)^3$, entonces

$$\{f_n(x)\}: (x-1)^3, (x-2)^3, (x-3)^3, \dots$$

Su gráfica será:



De lo anterior, podemos notar que para cada valor x_0 de x la sucesión $\{f_n(x)\}$ genera una sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}$.

Ejemplos:

1. Sea $f_n(x) = \log nx$.

Si $x=1$ se obtiene la siguiente sucesión.

$$f_n(1) = \log n$$

$$\{f_n(1)\}: \log 1, \log 2, \log 3, \dots$$

Si $x=2$ obtendremos

$$f_n(2) = \log 2n$$

$$\{f_n(2)\}: \log 2, \log 4, \log 6, \dots$$

CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES

Las sucesiones numéricas que se obtienen de una sucesión de funciones para los diferentes valores de la variable, pueden, o no, tener límites. Es decir, para un valor $x=x_0$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ puede tener límite, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ puede existir, mientras que para un valor $x=x_1$ la sucesión $\{f_n(x_1)\}$ puede no tener límite. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición (límite de una sucesión de funciones)

Se dice que la función f es el límite de la sucesión de funciones $f_n(x)$ $\{f_n(x)\}$ en el intervalo $\langle a; b \rangle$

si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x_0)\} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \langle a; b \rangle$ y se

denota por: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

De acuerdo con esta definición puede suceder que $\{f_n(x_0)\}$ se aproxime a $f(x_0)$ más rápidamente que $\{f_n(x_1)\}$ a $f(x_1)$ siendo aún $f(x)$ el límite de $f_n(x)$. Se puede dar entonces una definición más restringida del límite de una sucesión de funciones que asegura que $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ con la misma rapidez para todos los valores de x dentro del intervalo de definición de la sucesión.

Definición (convergencia uniforme)

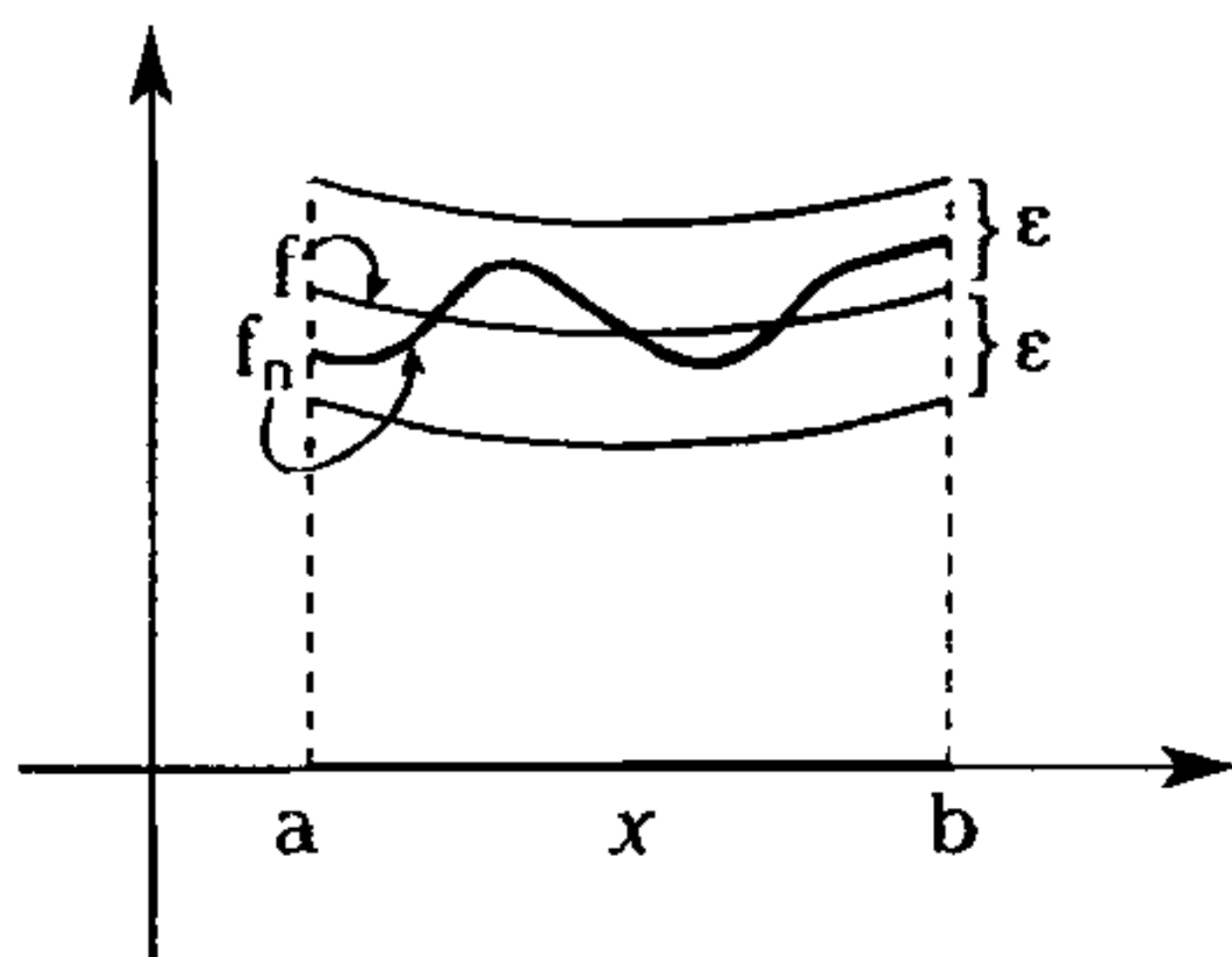
Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a la función f en el intervalo $\langle a; b \rangle$ si y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ existe un valor $N > 0$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $n > N$ y para todo $x \in \langle a; b \rangle$.

De esta definición podemos decir que toda sucesión uniformemente convergente en un intervalo es necesariamente convergente. Pero, una serie convergente en un intervalo I_1 puede no ser uniformemente convergente en ese intervalo, aunque puede serlo en un intervalo $I_2 \subset I_1$.

En el presente capítulo, consideraremos solamente la convergencia uniforme de funciones salvo indicación explícita de lo contrario. La forma más útil de investigar la convergencia de una sucesión de funciones es aplicar la siguiente generalización de una sucesión de Cauchy.

La sucesión $\{f_n(x)\}$ definida en el intervalo $\langle a; b \rangle$ converge uniformemente en ese intervalo si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que:

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todo m, n mayores que N y para todo $x \in \langle a; b \rangle$



El gráfico muestra que f_n converge a f , entonces $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$, $\forall x \in \langle a; b \rangle$, es decir f_n pertenece a una banda de radio ε alrededor de f .

Ejemplo 1

Sea la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Determine si esta sucesión es convergente.

Resolución:

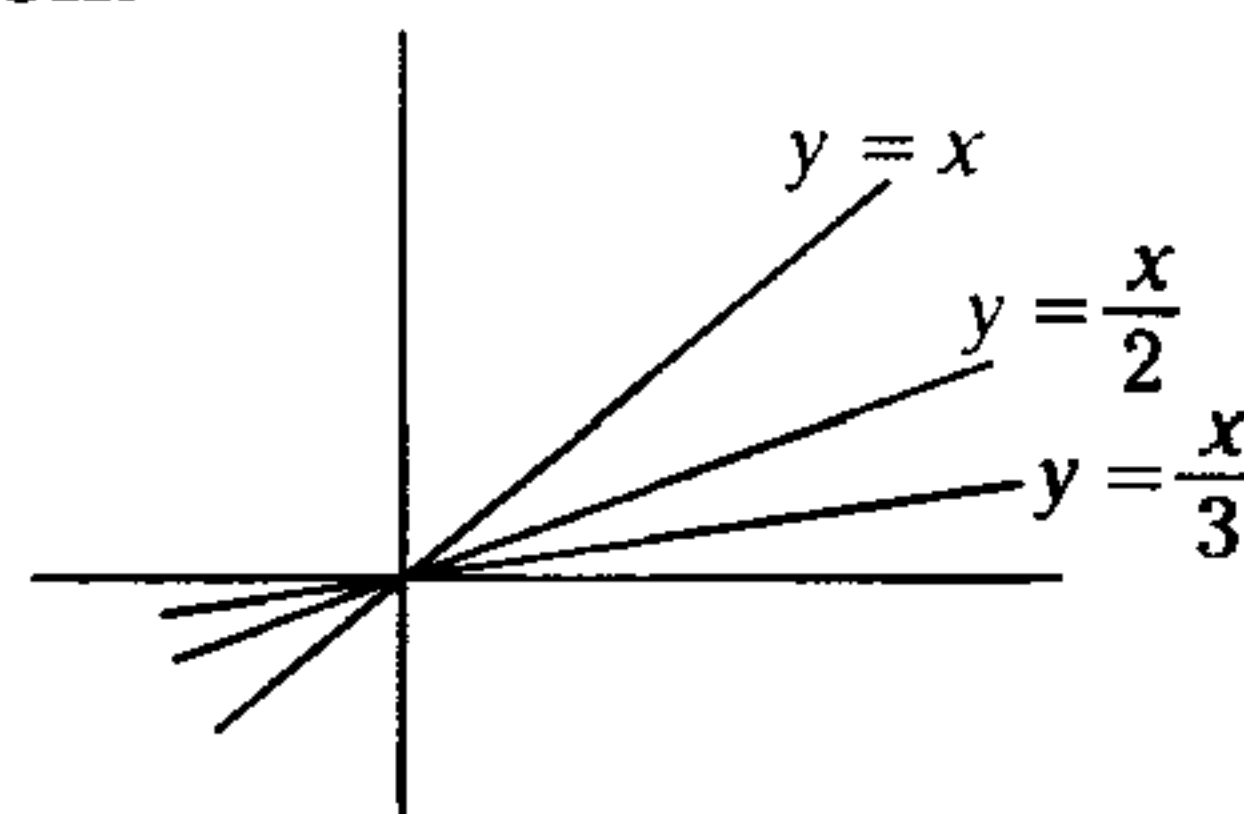
Tomemos el límite de su término enésimo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0,$$

entonces f_n es convergente y converge a la función idénticamente nula ($f(x) = 0$)

Ejemplo 2

Utilice la sucesión anterior y verifique si converge uniformemente.

Resolución:

Ninguna banda de radio ε alrededor de $f(x) = 0$ (eje de las abscisas) contiene al gráfico de cualquier función $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n = \frac{x}{n}$. Luego la sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente a la función idénticamente nula en todo \mathbb{R} . Pero si consideramos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, donde $I = \{x \in \mathbb{R} / |x| < c, c \in \mathbb{R}\}$, entonces f_n converge uniformemente a f ($f(x) = 0$) en I . A continuación haremos su demostración.

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $n_0 > \frac{c}{\varepsilon}$ ($\frac{c}{\varepsilon} < \varepsilon$) si $n > n_0$

$\left(\frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}\right)$ entonces,

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| =$$

$$= |f_n(x)| = \frac{|x|}{n} < \frac{c}{n} < \frac{c}{n_0} < \varepsilon$$

SERIE DE FUNCIONES

Una serie de funciones se define en forma análoga a una serie numérica.

Definición

La adición de todas las funciones que son términos de una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ es una serie de funciones que se denota mediante

el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

CONVERGENCIA DE SERIE DE FUNCIONES

Definición

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente en el intervalo $\langle a; b \rangle$ si y sólo si la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, donde $f_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$, es decir, si su sucesión de sumas parciales es convergente en $\langle a; b \rangle$.

Debido a que para cada valor de x la sucesión de sumas parciales da origen a una serie numérica, se pueden emplear, para analizar la convergencia de series de funciones, todos los criterios que se aplican en el caso de series numéricas.

Ejemplo:

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, utilicemos el criterio de la razón para hallar el intervalo de convergencia de la serie.

Sabemos que $a_n = \frac{x^n}{n}$ y $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot n}{x^n(n+1)} \right| = |x| \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|}_1 = |x|$$

Si $|x| < 1 \Rightarrow x \in \underbrace{\langle -1, 1 \rangle}_{\text{intervalo de convergencia}}$

Ejemplos

1. Sea la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, donde

$f_n(x) = x^n$, entonces la serie de funciones

está dado por $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots$

2. Si $f_n(x) = e^{nx}$,

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} = e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots$

Si $|x| = 1 \Rightarrow$ hay que aplicar otro criterio.

Si $|x| > 1 \Rightarrow x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$ la serie diverge.

Definición

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente, en el intervalo $\langle a; b \rangle$, a la función $f(x)$ si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{S_n(x)\}$, donde

$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ converge uniformemente a la función f en el intervalo $\langle a; b \rangle$.

Se denota por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

y se dice que $f(x)$ es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Esto significa que, para cada valor de x , se puede aproximar a la función $f(x)$ mediante la n -ésima

suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, es decir, que se puede escribir $f(x) \approx S_n(x)$, cometándose un error

$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$ y que este error tienda a cero cuando n tiende al infinito.

1. CRITERIOS DE LA CONVERGENCIA UNIFORME

a. Criterio de Cauchy

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en el intervalo $\langle a; b \rangle$ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

para toda $n > N$, para toda $x \in \langle a; b \rangle$ y para toda p .

b. Criterio M de Weierstrass

Sea (M_n) una sucesión de números reales tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo n y para todo

$x \in \langle a, b \rangle$ siendo además la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$

convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en el intervalo $\langle a; b \rangle$

Demostración

Dados $p \in \mathbb{N}$, $q = 0, 1, 2, \dots$ y $x \in \langle a; b \rangle$

$$\left| \sum_{n=p}^{p+q} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=p}^{p+q} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p}^{p+q} M_n$$

y como este último sumando es menor que $\varepsilon > 0$ (dado previamente) cuando p es posterior a cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ y $q = 0, 1, 2, \dots$, por

ser la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente se tiene que

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es uniformemente

convergente en $\langle a; b \rangle$.

Definición

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es absolutamente convergente en el intervalo $\langle a; b \rangle$ si y sólo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ es uniformemente convergente en el intervalo $\langle a; b \rangle$.



El criterio M de Weierstrass prueba no sólo la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, sino la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ lo que se expresa diciendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniforme y absolutamente.

Ejemplo:

La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{senn}x}{n^{3/2}}$ definida en \mathbb{R} es uniforme y absolutamente convergente en \mathbb{R} . Ello es consecuencia de la desigualdad.

$$\left| \frac{\text{senn}x}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ y del criterio M de Weierstrass.

2. PROPIEDADES DE SERIES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES

Dos propiedades muy importantes de las series uniformemente convergentes son:

1. Si se tiene que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en $\langle a; b \rangle$ y cada $f_n(x)$ es continua en $\langle a; b \rangle$, entonces $f(x)$ es continua en $\langle a; b \rangle$.

2. Si las funciones que forman la sucesión $\{f_n(x)\}$ son continuas y derivables en $\langle a; b \rangle$ y se tiene $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ y $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, entonces $f'(x) = g(x)$.

Es decir, la serie formada por las derivadas de los términos de una serie uniformemente convergente, es uniformemente convergente y su suma es la derivada de la suma de la serie original.

SERIE DE POTENCIAS

Definición

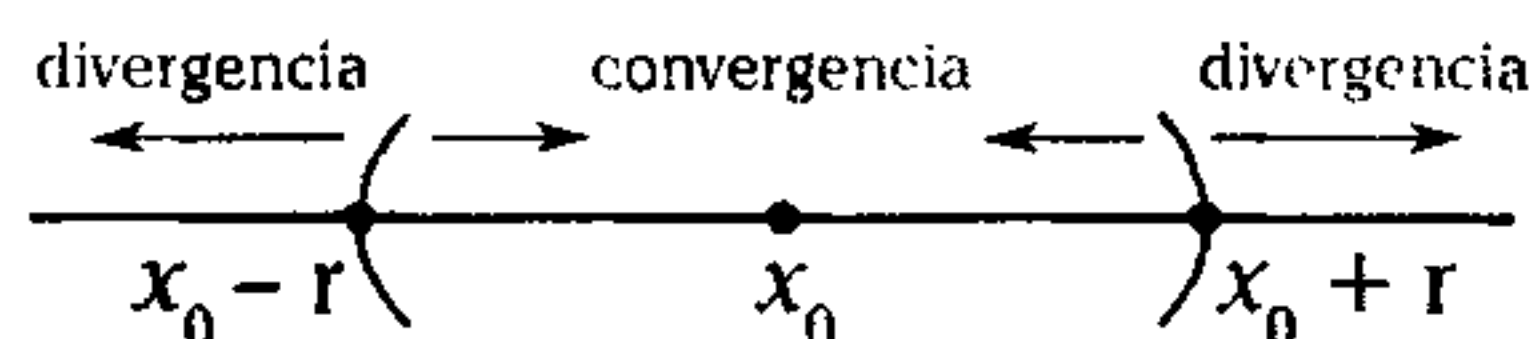
Una serie de potencias es una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$$

donde x_0 y los $a_i, i=1; 2; 3; \dots; n$ son constantes. Observe que, cuando todos los coeficientes a partir de alguno se anulan, la serie de potencias es un polinomio.

CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Cuando $x=x_0$ la serie de potencias converge, debido a que todos sus términos son iguales a cero. Si existen otros valores de x para los cuales la serie converge éstos forman una vecindad de x_0 de radio r . Al radio de esta vecindad se le llama radio de convergencia de la serie.



1. CRITERIOS DE CONVERGENCIA (por Cauchy-Hadamard)

Dada una serie de potencias centrada en x_0 ,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, llamaremos radio de convergencia al valor $r > 0$, el cual está dado por:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{o por}$$

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Se dice que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ converge absolutamente en } \langle x_0 - r; x_0 + r \rangle$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ diverge en } \mathbb{R} - [x_0 - r; x_0 + r]$$

Llamaremos intervalo de convergencia de la serie dada al intervalo $\langle x_0 - r; x_0 + r \rangle$

Ejemplos:

Halle el radio de convergencia de las siguientes series:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Calculemos:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = +\infty$$

en consecuencia la serie convergerá absolutamente para todo número real x .

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

Calculemos:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

la serie converge absolutamente $\forall x \in (-1; 1)$ y diverge $\forall x \notin [-1; 1]$. En el punto $x = -1$ la serie de puntos coincide con la serie armónica que es divergente; y en $x = 1$

obtenemos la serie anarmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que es convergente.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

Calculemos:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

esto quiere decir que la serie diverge

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

TEOREMAS

1. Una serie de potencias es una función continua dentro de su intervalo de convergencia.

2. Si se tiene que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ y } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

entonces $a_n = b_n$ para todo n .

3. Si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$,

$$\text{entonces } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

para todo $f(x)$ definida en su intervalo de convergencia.

2. SERIES DE TAYLOR

Definición

Si una serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$,

tiene el intervalo de convergencia $\langle x_0 - r; x_0 + r \rangle$ recibe el nombre de serie de Taylor si y sólo si existe $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \dots$$

Derivando $f(x)$ tenemos:

$$f(x) = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 (x-x_0) + 3a_3 (x-x_0)^2 + 4a_4 (x-x_0)^3 + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 (x-x_0) + 3 \cdot 4a_4 (x-x_0)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{f''(x_0)}{2!} = a_2$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 (x-x_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{f'''(x_0)}{3!} = a_3$$

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n a_n + 2 \cdot 3 \dots n(n+1) a_{n+1} (x-x_0) + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n$$

Reemplazando estos valores en $f(x)$ tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \dots$$

Es decir
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

es la serie de Taylor alrededor del punto x_0 .

3. SERIE DE MAC-LAURIN

Si en la serie de Taylor hacemos que $x_0=0$, entonces se tiene la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

es decir

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

la cual es denominada serie de Mac-Laurin.

Ejemplos

1. Determinar la serie de Taylor de la función

$$f(x) = \frac{1}{x+5} \text{ alrededor de } x_0=0 \text{ y } x_0=1$$

$$f(x) = \frac{1}{x+5} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{5}, f(1) = \frac{1}{6}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+5)^2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{5^2}, f'(1) = -\frac{1}{6^2}$$

$$f''(x) = \frac{2!}{(x+5)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2!}{5^3}, f''(1) = \frac{2!}{6^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-3!}{(x+5)^4} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{3!}{5^4}, f'''(1) = -\frac{3!}{6^4}$$

$$f^{iv}(x) = \frac{4!}{(x+5)^5} \Rightarrow f^{iv}(0) = \frac{4!}{5^5}, f^{iv}(1) = \frac{4!}{6^5}$$

Reemplazando en las fórmulas anteriores, obtenemos:

- a) La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x_0=1$

$$f(x) = \frac{1}{6} - \frac{(x-1)}{6^2} + \frac{(x-1)^2}{6^3} + \frac{(x-1)^3}{6^4} + \frac{(x-1)^4}{6^5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{6^{n+1}}$$

- b) La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x_0=0$, es decir la serie de Mac-Laurin de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{5} - \frac{x}{5^2} + \frac{x^2}{5^3} - \frac{x^3}{5^4} + \frac{x^4}{5^5} - \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^{n+1}}$$

2. Determinar la serie de Mac-Laurin de $f(x)=e^x$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$$

Luego,

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

3. Halle la serie de Mac-Laurin de $f(x)=\text{sen } x$

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f(0) = \text{sen } 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \Rightarrow f''(0) = -\text{sen } 0 = 0$$

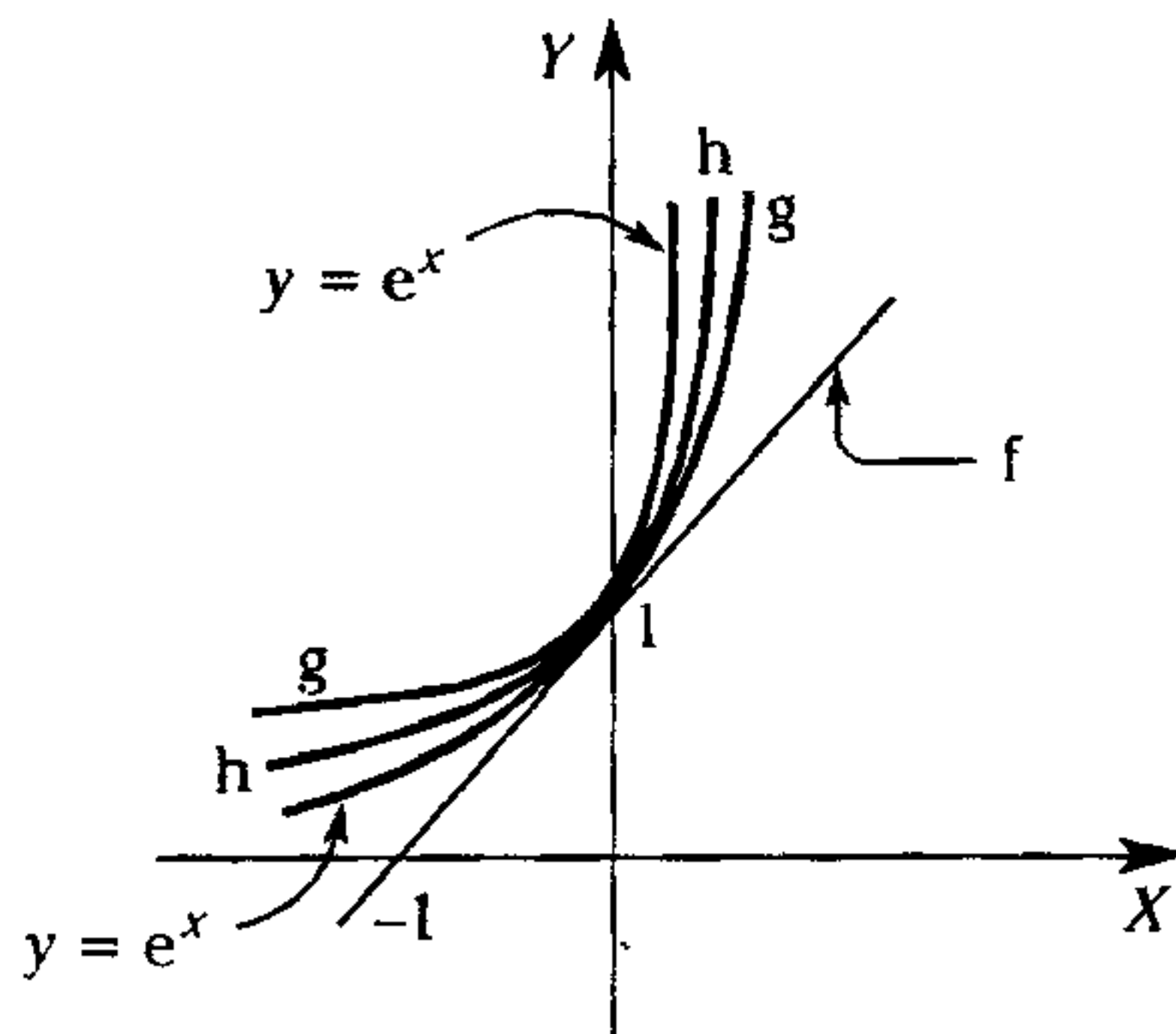
$$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

En consecuencia

$$f(x) = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Grafiquemos las funciones aproximadas a $y=e^x$



Donde: $f(x) = 1+x$

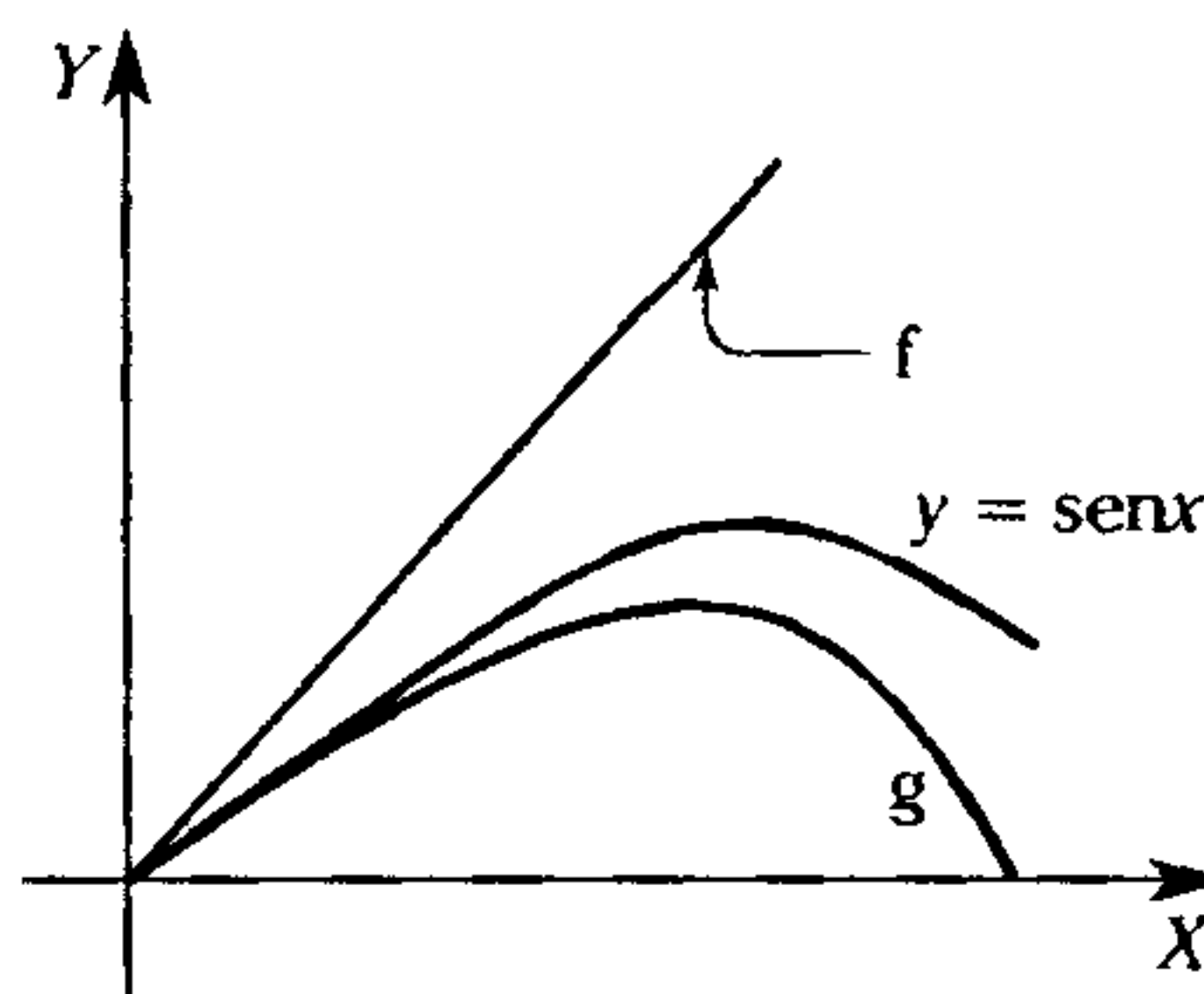
$$g(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}$$

$$h(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

Datos numéricos correspondientes a esta gráfica.

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2!}$	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$	e^x
0	1	1	1	1
0,1	1,1	1,105	1,10517	1,1052
0,2	1,2	1,220	1,22133	1,2214
0,3	1,3	1,345	1,34950	1,3499
0,4	1,4	1,480	1,49067	1,4918
-0,1	0,9	0,905	0,904833	0,90484
-0,2	0,8	0,820	0,818667	0,81873
-0,3	0,7	0,745	0,740500	0,74082
-0,4	0,6	0,680	0,669333	0,67032

Ahora grafiquemos las funciones que se aproximan a $y = \operatorname{sen} x$.



donde:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Los datos numéricos son dados en la siguiente tabla.

x	$x - \frac{x^3}{3!}$	$\operatorname{sen} x$
0	0	0
0,1	0,0998	0,09983
0,2	0,1987	0,19867
0,3	0,2955	0,29550

A continuación mostramos algunas funciones con su respectiva serie de Mac-Laurin.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+\dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} - \dots$$

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!} = 1 + (\ln a)x + \frac{(\ln^2 a)x^2}{2!} + \dots$$

$a > 0$

$$\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^3} + \dots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

4. MULTIPLICACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Sean las series de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

convergente sobre el intervalo I y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergente sobre el intervalo J , entonces la serie

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

sobre $I \cap J$.

Es decir,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

Ejercicio

Determinar el término de tercer grado en la expansión en la serie de Mac-Laurin de $A(x) = e^x \sin x$

Resolución:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \\ &\quad \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= x + x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) x^4 + \dots \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, el término pedido es $\frac{1}{3} x^3$.

5. DIVISIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Sean las series de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ la división de estas series está dado

por $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$; los coeficientes c_n podemos determinarlo en la siguiente multiplicación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$$

donde $a_n = \sum_{j=0}^n b_j c_{n-j}$

Ejercicio 1

Determinar el coeficiente del término de quinto grado en el desarrollo de la serie de Mac-Laurin de $\tan x$.

Resolución:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots}$$

Supongamos que

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \dots$$

entonces

$$\begin{aligned} \bullet \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet c_0 + c_1 x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2!} \right) x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!} \right) x^3 + \\ + \left(\frac{c_0}{4!} - \frac{c_2}{2!} \right) x^4 + \left(c_1 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} \right) x^5 + \dots \end{aligned}$$

De aquí, comparando estos desarrollos tenemos:

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 - \frac{c_0}{2!} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$c_3 - \frac{c_1}{2!} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} = \frac{1}{5!} \Rightarrow c_5 = \frac{1}{20} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{2}{15}$$

$$\text{Luego, } \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

Por lo tanto, el coeficiente buscado es igual a $\frac{2}{15}$.

Ejercicio 2

Calcular el valor de la siguiente serie:

$$S = 1 + \frac{3}{4(1!)} + \frac{9}{16(2!)} + \frac{27}{64(3!)} + \dots$$

Resolución:

De la serie exponencial obtenido en base a la serie de Mac-Laurin se tiene:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\text{Ahora para: } x = \frac{3}{4}$$

Se tiene:

$$e^{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{3}{4(1!)} + \frac{9}{16(2!)} + \frac{27}{64(3!)} + \dots$$

$$\therefore S = e^{\frac{3}{4}}$$

Ejercicio 3

Calcular la siguiente serie:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Resolución:

De la serie de Mac-Laurin se obtiene:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ahora para $x=1$

$$\Rightarrow \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\therefore S = \ln 2$$

Problemas Resueltos

Problema 1

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. La sucesión (a_n) , con $a_n = \frac{3n+5}{n}$ converge a 3.
- II. La sucesión (b_n) , con $b_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ es monótona creciente.
- III. La sucesión (c_n) , con $c_n = \frac{n^2+2n+3}{(n+1)^2}$ es acotada.

Resolución:

$$I. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{n} = 3$$

Por tanto, (a_n) converge a 3.

$$II. b_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n} \text{ y } b_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$$

Sabemos que

$$3n > 1$$

$$4n > n+1$$

$$2^{2n}(4n) > 2^{2n}(n+1)$$

$$\frac{n}{2^{2n}} > \frac{n+1}{2^{2(n+1)}}$$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{2^n}}_{b_n} > \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}}_{b_{n+1}}$$

$\therefore (b_n)$ es monótona decreciente.

$$III. c_n = \frac{n^2+2n+1+2}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^2}$$

$$c_n = 1 + \frac{2}{(n+1)^2} < 1+1=2,$$

entonces $0 < c_n < 2$.

$\therefore (c_n)$ es una sucesión acotada.

Problema 2

Sean las sucesiones cuyos términos enésimos sean:

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

$$b_n = \frac{2n+1}{n}$$

tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$

Halle el punto de convergencia de $\{c_n\}$

Resolución:

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

Aplicando el criterio del emparejado $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$

$\therefore \{c_n\}$ converge a 2.

Problema 3

Demostrar que la sucesión (a_n) diverge

$$a_n = \sqrt[n]{n!}$$

Resolución:

Sabemos que: $n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{2\pi n} e^{-1} n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\pi n} e^{-1} n = \infty$$

Recordar que $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{m} = 1$

Problema 4

Si la siguiente sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$, tal que $a_n = 3x + (n+1)(y+3)$, $x \in \mathbb{R}$ es creciente. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $y \in \langle -3; +\infty \rangle$
- II. $y \in \langle -\infty; 3 \rangle$
- III. $y \in \mathbb{R}$

Resolución:

Sabemos que:

$$a_n = 3x + (n+1)(y+3)$$

$$a_{n+1} = 3x + (n+2)(y+3)$$

Como a_n es creciente, entonces

$$a_n < a_{n+1}$$

$$3x + (n+1)(y+3) < 3x + (n+2)(y+3)$$

$$(y+3)(n+1-n-2) < 0$$

$$(y+3)(-1) < 0$$

$$y+3 > 0$$

$$y > -3$$

$$\therefore y \in < -3; +\infty >$$

I. Es verdadero.

II. Es falso.

III. Es falso.

Problema 5Sea la sucesión (a_n) tal que $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 5} - 3}{2n - 2}$

Calcular una cota superior de la sucesión.

Resolución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2 + 3n + 5} - 3}{n}}{\frac{2n - 2}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} - \frac{3}{n}}{2 - \frac{2}{n}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, una cota superior de la sucesión (a_n) puede ser cualquier número real mayor o igual a $\frac{1}{2}$ **Problema 6**Sea la sucesión (S_n) con $S_n = \sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n}$ Halle el mínimo valor de n , a partir del cual la sucesión es creciente.**Resolución:**Sea f la función asociada

$$f(x) = x^{2/3} - 4x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{2/3}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^{1/3} - 2}{x^{2/3}} \right) > 0$$

$$\Rightarrow x > 8$$

 \therefore el menor valor de n es igual a 9.**Problema 7**Calcular el punto de convergencia de la sucesión (a_n) si:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5}^{1/n} + \sqrt{15}^{1/n} + \sqrt{45}^{1/n}}{3} \right)^n$$

Resolución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln \left(\frac{\sqrt{5}^{1/n} + \sqrt{15}^{1/n} + \sqrt{45}^{1/n}}{3} \right)}$$

Haciendo $\frac{1}{n} = x$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\sqrt{5}^x + \sqrt{15}^x + \sqrt{45}^x}{3} \right)}$$

Aplicando L'Hospital

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5}^x \ln \sqrt{5} + \sqrt{15}^x \ln \sqrt{15} + \sqrt{45}^x \ln \sqrt{45}}{\sqrt{5}^x + \sqrt{15}^x + \sqrt{45}^x}}$$

$$= e^{\frac{\ln \sqrt{5} + \ln \sqrt{15} + \ln \sqrt{45}}{3}}$$

$$= e^{\ln(\sqrt{5} \sqrt{15} \sqrt{45})^{1/3}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{5} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{45}}$$

$$= \sqrt{15}$$

Problema 8

Si $p > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calcular el valor al cual converge la sucesión (b_n) ,

$$\text{si } b_n = \frac{n^\alpha}{(1+p)^n}$$

Resolución:

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, tal que $k > \alpha$, $k > 0$ y además que

$$n > 2k, \frac{n}{k} > 2$$

Sabemos que:

$$(1+p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

Entonces

$$(1+p)^n > \frac{n^k p^k}{2^k k!}$$

$$0 < \frac{1}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{n^k p^k}$$

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k}$$

Como $\alpha - k < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-k} = 0$$

$$\text{En } \underbrace{0}_{\tilde{a}_n} < \underbrace{\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}}_{b_n} < \underbrace{\frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k}}_{c_n}$$

ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$,

Aplicando el criterio del emparejado $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Problema 9

$$\text{Si } F(n) = \frac{\lfloor x \rfloor \binom{n}{x+2}}{n^{x+2}}, \quad x \in \mathbb{N}$$

Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$

Resolución:

Sea

$$F(n) = \frac{\lfloor x \rfloor \binom{n}{x+2}}{n^{x+2}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x-1) \lfloor x \rfloor}{n^{x+2} \lfloor x+2 \rfloor}$$

$$F(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x-1)}{n^{x+2}(x+1)(x+2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

Problema 10

Calcule la suma en:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^{k+1}}$$

Resolución:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} \right) + \left(\frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n+1}}$$

Problema 11

Determine la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + n}}$$

Si ésta converge indique su suma.

Resolución:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

La k -ésima suma parcial de esta serie es:

$$S_n = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = - \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$S_n = - \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -1$$

\therefore la serie converge y su suma es -1 .

Problema 12

La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es 6, si la suma

de los dos primeros términos es $\frac{13}{2}$. Halle el primer término de la progresión.

Resolución:

Sea la P.G. $\therefore a : ar : ar^2 : ar^3 : \dots$

Como es decreciente $|r| < 1$

entonces su suma es igual a $\frac{a}{1-r} = 6$

Además, $a + a + r = \frac{13}{2}$

Luego,
$$\begin{cases} 6(1-r) = a \\ \frac{13}{2} = 2a + r \end{cases}$$

Operando se tiene:

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$$

Problema 13

Determine el valor al cual converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)!}$$

Resolución:

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n(n-1)(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right)$$

Halleemos la k -ésima suma parcial de la serie:

$$\sum_{n=2}^k \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{k!}$$

$$= 1 - \frac{1}{k!}$$

Luego,

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k!} \right) = 1$$

\therefore la serie dada converge a 1.

Problema 14

Sea la sucesión (a_n) cuyo término enésimo está dado por la fórmula de recurrencia.

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$$

Indicar el valor de

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Resolución:

De la condición dada

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} a_1 = 1$$

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{2^2}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 2 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots}_{\text{serie geométrica}}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

Problema 15

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n(n^2+1)}$; $a > 0$ dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. Si $|a| > 1$, la serie diverge.
- II. Si $|a| < 1$, la serie converge.
- III. $\forall a \in \mathbb{Q}$, la serie converge.

Resolución:

Aplicaremos el criterio de la razón para esta serie, cuyo término enésimo es:

$$U_n = \frac{n}{a^n(n^2+1)}, \quad U_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}((n+1)^2+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^n(n^2+1)(n+1)}{a^{n+1}(n^2+2n+2) \cdot n} \right|$$

Ya que el numerador y denominador tienen mismo grado el límite es igual a la división de sus

coeficientes principales, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{1}{a}$.

Por lo tanto, la serie converge si $\frac{1}{a} < 1$

$$\Rightarrow 1 < a \text{ (como } a > 0 \Rightarrow |a| = a)$$

$$\Rightarrow |a| > 1$$

- I. Es falso.
- II. Es falso.
- III. Es falso.

Problema 16

Dada la sucesión (a_n) , tal que $a_n = \left(\frac{\ln(na)}{\ln(nb)} \right)^{\ln n}$

Halle el punto de convergencia de la sucesión.

Resolución:

$$a_n = \left[\frac{\ln \left[\frac{abn}{b} \right]}{\ln(nb)} \right]^{\ln(n)}$$

$$a_n = \left[\frac{\ln(nb) + \ln \left(\frac{a}{b} \right)}{\ln(nb)} \right]^{\ln(n)}$$

$$a_n = \left[1 + \frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right)}{\ln(nb)} \right]^{\ln(n)} <> f_{(n)}^{g(n)}$$

Vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ tiene la forma 1^∞ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n)-1)g(n)}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln \left(\frac{a}{b} \right)}{\ln(nb)} \cdot \ln(n) \right]}$$

$$= e^{\ln \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(nb)}}$$

Por L'Hospital

$$\ln \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{nb}} \right)$$

$$= e$$

$$= e^{\ln \left(\frac{a}{b} \right)} = \frac{a}{b}$$

Problema 17

$$\text{Si } a_n = \frac{(2n^2+3) \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)}{(n^6+5) \ln \left(1 + \frac{1}{n^6} \right)}$$

Calcule el valor al cual converge la sucesión (a_n) .

Resolución:

Teniendo en cuenta las siguientes equivalencias en el infinito.

$$2n^2+3 <> 2n^2$$

$$1 - \cos \frac{1}{n} <> \frac{1}{2n^2}$$

$$n^6+5 <> n^6$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^6} \right) <> \frac{1}{n^6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2) \left(\frac{1}{2n^2} \right)}{(n^6) \left(\frac{1}{n^6} \right)} = 1$$

\therefore la sucesión (a_n) converge a 1.

Problema 18

Determine el valor al cual converge la sucesión

$$(S_n) \text{ si } S_n = \frac{\sum_{k=1}^n k^2 \sin \frac{\theta}{k}}{n^2}$$

Resolución:

Sea $a_n = \sum_{k=1}^n k^2 \sin \left(\frac{\theta}{k} \right)$ una sucesión monótona y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \text{ ya que}$$

$$a_n = \sin \theta + 2^2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) + 3^2 \sin \left(\frac{\theta}{3} \right) + \dots + n^2 \sin \left(\frac{\theta}{n} \right)$$

Por el criterio de Stolz–Cesaro

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin \left(\frac{\theta}{n} \right)}{n^2 - (n-1)^2}$$

Por equivalencias

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{\theta}{n} \right)}{2n-1} = \frac{\theta}{2}$$

$\therefore S_n$ es una sucesión que converge a $\frac{\theta}{2}$

Problema 19

Si la sucesión $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$ es una sucesión convergente y cada término es la media aritmética de los que la preceden. Hallar el límite de la sucesión.

Resolución:

$$\text{Por dato } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$$

Dando valores a n .

$$2a_3 = a_1 + a_2$$

$$2a_4 = a_3 + a_2$$

$$2a_5 = a_4 + a_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Sumando queda: $a_{n-1} + 2a_n = a_1 + 2a_2 \dots (*)$

Como (a_n) converge entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Tomando límites en $(*)$

$$3L = a_1 + 2a_2$$

$$L = \frac{a_1 + 2a_2}{3}$$

Problema 20

Estudiar la naturaleza de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)(n+1) \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n} \right)}{n^3 + 2n + 1}$$

Resolución:

El término enésimo de la serie es:

$$a_n = \frac{(3n+2)(n+1) \operatorname{tg} \left(\frac{1}{n} \right)}{2n+1}$$

Por equivalencias

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(\cancel{n}) \left(\frac{1}{\cancel{n}} \right)}{(2n+1)} \\ &= \frac{3}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

Luego, la serie es divergente, ya que no cumple la condición necesaria de convergencia.

Problema 21

Estudie la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

Resolución:

$$\text{Sabemos que } \underbrace{\frac{1+\cos n}{n^2}}_{a_n} < \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{b_n}$$

Por las p -series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y aplicando el criterio de comparación, podemos decir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Problema 22

Indique el valor de verdad con respecto a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+r^n}, r > 0$$

I. Si $r=1$ la serie diverge.

II. Si $r > 1$ la serie diverge.

III. Si $r < 1$ la serie diverge.

Resolución:

I. Si $r=1$, la serie diverge ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \neq 0$$

Aplicando el criterio de la razón.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^n}{1+r^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} + 1}{\frac{1}{r^n} + \frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

II. Converge si: $\frac{1}{r} < 1$

$$\Rightarrow r > 1$$

III. Diverge si: $\frac{1}{r} > 1$

$$\Rightarrow r < 1$$

Problema 23

Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ cuando $a > 0$.

Resolución:

Sea $x_n = \sqrt[n]{a} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a = (1+x_n)^n \geq 1+nx_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces

$$x_n \leq \frac{a-1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideremos dos casos:

I. Si $a \geq 1: 0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n}$

Por el teorema del emparejado.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

II. Si $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Problema 24

Dada la serie $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$

Indicar el valor de verdad en las siguientes proposiciones.

I. La serie diverge.

II. La serie converge a cero.

III. La serie converge.

Resolución:

De la serie su término enésimo es $a_n = \frac{1}{(2n+1)!}$

Apliquemos el criterio de la razón.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \right| = 0 < 1$$

Por lo tanto, la serie converge, pero no podemos decir a que valor, además no podemos decir que converge a cero ya que todos sus términos son positivos.

Problema 25

Halle el límite de la sucesión (a_n) si

$$a_n = \frac{(n^2-1)(n^2-2)\dots(n^2-n)}{(n^2+1)(n^2+3)\dots(n^2+2n-1)}$$

Resolución:

Dividiendo el numerador y denominador por

$(n^2)^n$ resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n^2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{2n-1}{n^2}\right)} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{1}{n^2}} \left[\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{-\frac{n^2}{2}}\right]^{\frac{2}{n^2}} \cdots \left[\left(1 - \frac{n}{n^2}\right)^{-\frac{n^2}{n}}\right]^{\frac{n}{n^2}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n^2}} \left[\left(1 + \frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\right]^{\frac{3}{n^2}} \cdots \left[\left(1 + \frac{2n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2n-1}}\right]^{\frac{2n-1}{n^2}}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}}}{e^{\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{n(n+1)}{2n^2}}}{e^{\frac{n^2}{n^2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e} = e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Problema 26

Determine el valor al cual converge la sucesión (b_n) si:

$$b_n = \sqrt{\frac{4n+1}{n}} \left(\frac{n^3-1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}$$

Resolución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{4n+1}{n}} \left(\frac{n^3-1}{n^3+n}\right)^{n^2+1} \right]$$

La base tiende al $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}} = 2\right)$ y

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}$ es de la forma 1^∞ , que se

resuelve así:

$$\begin{aligned}&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^3-1}{n^3+n} - 1 \right] (n^2+1)} \\&= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3+n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2^{\frac{1}{e}}$$

Por lo tanto, (b_n) converge a $2^{\frac{1}{e}}$

Problema 26

Si se tiene la sucesión (S_n) en donde:

$$S_n = (5 + 7n^3)^{\frac{1}{6 + \ln(n+2)}}$$

Calcule el límite de la sucesión.

Resolución:

El límite de S_n es de la forma ∞^0 .

Tomando logaritmos neperianos resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ln S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[(5 + 7n^3)^{\frac{1}{6 + \ln(n+2)}} \right] \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(5 + 7n^3)}{6 + \ln(n+2)}\end{aligned}$$

Por equivalencias:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^3}{\ln n} = 3$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln S_n = 3 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e^3$

Problema 27

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces analizar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resolución:

$$\text{Sea } b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$$

Puede suceder los siguientes casos (utilizaremos el criterio de comparación)

$$\text{I. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a_n} = 1,$$

entonces ambas son divergentes.

$$\text{II. Si } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{1+a} > 0,$$

entonces ambas series divergen.

$$\text{III. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} = 1 \neq 0$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Problema 28

Halle el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Resolución:

Por el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{(1-x)^n} \right|} = \frac{x}{1-x}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{(1-x)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

Luego, si $\frac{x}{1-x} > 1$ diverge y si $\frac{x}{1-x} < 1$ converge.

Resolviendo $x < \frac{1}{2}$.

Problema 29

Demuestre que la sucesión $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}$ es uniformemente convergente para $x \in (-1; 1)$.

Resolución:

$$\left| \frac{x^m}{m} - \frac{x^n}{n} \right| = \left| \frac{x^n}{n} \left(\frac{nx^{m-n}}{m} - 1 \right) \right|; m > n$$

$$\leq \left| \frac{x^n}{n} \right| \left| \frac{nx^{m-n}}{m} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^n}{n} \right| \left[\left| \frac{nx^{m-n}}{m} \right| + 1 \right]$$

$$\leq \frac{1}{n} \left(\frac{n}{m} + 1 \right) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = \frac{2}{\varepsilon}$ tal que

$$\left| \frac{x^m}{m} - \frac{x^n}{n} \right| < \varepsilon \quad \forall m, n > N$$

\therefore la sucesión es uniformemente convergente en este intervalo.

Problema 30

Dada la serie $\frac{1}{1+2\sqrt{2}} + \frac{1}{2+3\sqrt{3}} + \frac{1}{3+4\sqrt{4}} + \dots$

Determine si es convergente o divergente.

Resolución:

La serie dada es :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + (n+1)\sqrt{n+1}}$$

Sabemos que

$$n + (n+1)\sqrt{n+1} > (n+1)\sqrt{n+1} > n\sqrt{n}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n\sqrt{n}}}_{a_n} > \underbrace{\frac{1}{n+(n+1)\sqrt{n+1}}}_{b_n}$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente por las p-series, entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+(n+1)\sqrt{n+1}}$ también converge.

Problema 31

Sea la serie de potencias

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. Si $|x| < 1$, la serie es absolutamente convergente.
- II. Si $|x| > 1$, la serie diverge.
- III. Si $|x| = 1$, la serie converge.

Resolución:

En la serie dada:

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n + \dots$$

Su término enésimo es $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n$, entonces aplicando el criterio de la razón.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{((n+1)^2-1)(n^2+1)x^{n+1}}{((n+1)^2+1)(n^2-1)x^n} \right| = |x|,$$

entonces

Si $|x| < 1 \Rightarrow$ es absolutamente convergente.

Si $|x| > 1 \Rightarrow$ diverge.

Si $|x| = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \neq 0$ diverge.

Problema 32

Sean α y β dos números reales. Dar el valor de verdad con respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+n-1)}$$

- I. Si $\alpha = \beta$, diverge.
- II. Si $\beta > \alpha + 1$, converge.
- III. Si $\beta < \alpha + 1$, diverge.

Resolución:

$$\text{Veamos } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta} \right) = 1$$

Por el criterio de la razón no se sabe nada; pero, por el criterio de Raabe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\beta-\alpha)}{n+\beta} = \beta - \alpha$$

Entonces

- a) Si $\beta - \alpha > 1$, $\beta > \alpha + 1$: converge.
- b) Si $\beta - \alpha < 1$, $\beta < \alpha + 1$: divergente.
- c) Si $\beta - \alpha = 1$, $\beta = 1 + \alpha$: no se sabe.

Por b) si $\beta = \alpha$ la serie diverge

Problema 33

Determinar el valor de verdad de las proposiciones

- I. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\log n}$ converge.
- II. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n\sqrt{n}}$ converge.
- III. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n+1}$ diverge.

Resolución:

De acuerdo al problema 23.

- I. $\log n > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log n} = 1 \neq 0$
 $n \geq 2$
 - II. $n\sqrt{n} > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n\sqrt{n}} = 1 \neq 0$
 - III. $n+1 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1 \neq 0$
- entonces todas las series divergen.

Problema 34

Determinar el carácter de una serie cuyo término general es:

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1}$$

Resolución:

Aplicando el criterio de Pringshein

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha \sqrt[3]{n+2}}{n^3+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(n+2)n^{3\alpha}}{(n^3+1)^3}}\end{aligned}$$

Para $3\alpha + 1 = 9$

$$\alpha = \frac{8}{3} > 1$$

\therefore la serie converge.

Problema 35

Analizar la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na+b}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Resolución:

Por el criterio de Pringshein

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{na+b} = \frac{1}{a}, \quad \text{para } \alpha = 1,$$

Por tanto es divergente.

Problema 36

Determinar la naturaleza de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+4)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+4} = 1\end{aligned}$$

No se concluye nada, por tanto aplicamos el criterio de Raabe

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+4} \\ &= \frac{3}{2} > 1\end{aligned}$$

\therefore la serie converge.

Problema 37

Sea $x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Demostrar que (x_n) es convergente.

Resolución:

$$\text{Veamos } x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$$

Luego, la sucesión (x_n) es monótona creciente.

$$1 \leq x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Usemos: $2^{k-1} \leq k! \quad \forall k \geq 1$

$$\Rightarrow x_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

$$\Rightarrow (x_n) \text{ es acotada.}$$

$\therefore (x_n)$ es convergente

Problema 38

Demostrar que (y_n) es convergente si

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \text{ Luego halle } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Resolución:**Demostración**

Por el Binomio de Newton

$$y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! k! n^k} = \frac{(n-k+1) \dots (n-1) n}{k!} \frac{1}{n^k}$$

$$= \left(\frac{n-k+1}{n}\right) \left(\frac{n-k}{n}\right) \dots \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$= \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{k!} -$$

$$- \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^n \underbrace{\left[\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]}_0 \frac{1}{k!}$$

$$+ \underbrace{\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{>0} \frac{1}{(n+1)} \geq 0, \forall n$$

$\Rightarrow (y_n)$ es monótona creciente.

$$y_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{k!} \leq 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}}_{x_n}$$

$\Rightarrow y_n \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore (y_n)$ es acotada superiormente, luego (y_n) es convergente.

Más aún $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \dots (*)$

Vamos ahora a probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ (fijo arbitrario)

Sea $n \geq m$, tenemos:

$$y_n = 1 + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$\geq 1 + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{k!}$$

$$\geq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} = x_m$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq x_m, \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \dots (**)$$

De (*) y (**)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$e \approx 2,7182$$

Problema 39

Aproximar la serie

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Resolución:

Sabemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Como la serie es uniformemente convergente, podemos integrar.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Problema 40

Probar que la sucesión (x_n) cuyo término general está dado por $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ con $a > 0$ representa la aproximación a la raíz cuadrada de a .

Resolución:**Demostración**

$$\text{De } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} + 4a \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(x_n - \frac{a}{x_n} \right)^2 + 4a \right] \geq a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 \geq a, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Luego, } x_n^2 \geq a, \forall n \geq 2$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n} \right)^2 = x_n^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 \leq x_n^2, \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$$

Por lo tanto, (x_n) es monótona decreciente y acotada inferiormente, luego es convergente.

$$\text{En } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

$$L = \frac{1}{2} \left(L + \frac{a}{L} \right)$$

$$L = \sqrt{a}$$

Problema 41

Encuentre el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^n \frac{1}{n^4}$$

Resolución:

Por el criterio de la razón se tiene:

$$\begin{aligned} \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim \left| \frac{\left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^4}}{\left(\frac{x+3}{x+2} \right)^n \frac{1}{n^4}} \right| \\ &= \lim \left| \frac{x+3}{x+2} \right| \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = \left| \frac{x+3}{x+2} \right| = L \end{aligned}$$

Para que sea convergente $L < 1$.

$$\Rightarrow \left| \frac{x+3}{x+2} \right| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{x+3}{x+2} < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 1 + \frac{1}{x+2} < 1$$

$$\Rightarrow -2 < \frac{1}{x+2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} > x+2$$

$$\Rightarrow x < -\frac{5}{2}$$

 \therefore el intervalo de convergencia es:

$$\left\langle -\infty; -\frac{5}{2} \right\rangle$$

Problemas Propuestos

1. Sea la sucesión (x_n) cuya regla de

$$\text{correspondencia es } x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Dar el valor de verdad de las proposiciones:

I. (x_n) es monótona.

II. (x_n) es acotada.

III. (x_n) es convergente.

- A) VFF B) FVF C) VVV
D) VFV E) FFF

2. Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con:

$$a_n = (n+1)^2 \text{ y } b_n = \frac{1}{n+2}$$

Dar el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\{a_n + b_n\} = \left\{ \frac{n^3 + 4n^2 + 5n + 3}{n+2} \right\}$

II. $\{a_n\}$ es creciente

III. $\{a_n b_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n + 1}{n+2} \right\}$

- A) VFV B) VVV C) FVF
D) VVF E) VFF

3. Dada la expresión:

$$H_n(x) = \frac{x^p - n^3 x^{p-1}}{n^3} \quad p \in \mathbb{N}$$

Calcular $H_n(x)$ cuando n tiende a $+\infty$.

- A) x B) 1 C) 0
D) $-x^{p-1}$ E) n

4. Halle el valor al cual converge (a_n) si

$$a_n = \left[\frac{\sqrt[3]{7^{1/n}} + \sqrt[3]{14^{1/n}} + \sqrt[3]{28^{1/n}}}{3} \right]^n$$

- A) $2\sqrt{7}$ B) 14 C) $\sqrt{14}$
D) $\sqrt[3]{14}$ E) $\sqrt[3]{7}$

5. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = A$ se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (U_n + U_{n+1} + U_{n+2}) = 3A - 2U_1 - U_2,$$

$$A \in \mathbb{R}.$$

II. Si $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ converge se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n} \right) U_n \text{ converge.}$$

III. Si $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ diverge y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces si $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n + \dots$ es convergente se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \lambda_n}{n} = 0$.

- A) VFV B) VFF C) VVF
D) FVV E) VVV

6. Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}, \quad p \in \mathbb{N}$$

Indicar el valor de verdad de:

I. Para algún P la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, diverge.

- II. Para todo $p \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge.
 III. Es una serie convergente.
- A) VVV B) FFF C) VFV
 D) FVV E) FVV
7. Si S es la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (\pi - e)^{2k}$ con $3 < \pi < 4$ y $2 < e < 3$.
 Indique el valor de $S(1 - (\pi - e)^2)$.
- A) 0 B) 1 C) π
 D) e E) ∞
8. Sea la sucesión (x_n) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$,
 entonces la sucesión converge a:
- A) 1 B) -1 C) 0
 D) converge a algún valor.
 E) no se sabe a dónde converge.
9. Sea (a_n) una sucesión, tal que $a_{n+1} = \lambda a_n$
 $(\lambda: \text{cte})$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces:
- A) $|\lambda| \geq 1$ B) $\lambda = 0,1$ C) $|\lambda| < 1$
 D) $\lambda < 1$ E) $|\lambda| < \frac{1}{n}$
10. Dadas las sucesiones (x_n) y (y_n) tal que
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$; $y_n = \min\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$,
 entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ es igual a:
- A) $|x_1|$ B) x_1 C) x_n
 D) 1 E) 0
11. Calcule el valor de la siguiente sumatoria.
- $$\sum_{n=1}^{999} \log_{10} \sqrt[10]{1 + \frac{1}{n}}$$
- A) 1 B) 3 C) 0,3
 D) 0,5 E) 1,5
12. Determine el valor al cual converge la
 sucesión (a_n) si $a_n = \frac{\binom{n}{r}}{n^r}$.
- A) $r!$ B) $\frac{1}{r!}$ C) $2r!$
 D) r E) $\frac{r}{2}$
13. Indicar el límite de la sucesión (a_n) si
- $$a_n = \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^{\frac{1}{n}}$$
- A) 0 B) 1 C) ∞
 D) $\frac{1}{e}$ E) e
14. Indicar el carácter de la siguiente serie:
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+n^2} - n$$
- A) convergente B) divergente
 C) no se sabe
 D) diverge a 3 E) converge a ∞
15. Halle la suma de la serie
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{8}$ E) ∞

16. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\text{si } a_n = \frac{\text{sen}(nx)}{n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- A) 1 B) 0 C) -1
D) ∞ E) 2

17. Indique el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}$$

- A) $\langle 0; 2 \rangle$ B) $\langle 2; 2 \rangle$ C) \mathbb{R}^+
D) \emptyset E) $\{-2; 2\}$

18. Demostrar que la sucesión (a_n) con:

$$a_n = \frac{\text{sen} nx}{n^2 + 1}$$

es uniformemente convergente para todo x .

19. Hallar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^2}{n(n+1)} \quad (e = 2,71)$$

- A) e^3 B) e^{-2} C) $2e$
D) $-2e$ E) e^2

20. Sea (x_n) una sucesión de números

complejos con $x_n = (e^{ix})^{n-1}$, luego con

respecto a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{ix})^{n-1}$ se afirma que:

- A) es divergente
B) es convergente
C) es monótona
D) no es acotada
E) es acotada

21. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Toda sucesión (a_n) acotada, es convergente.

II. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}) = 3a$, $a \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

III. Si $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ y ambas sucesiones convergen, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- A) FFV B) VFV C) FFF
D) VVV E) VVF

22. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $0 \leq t_n \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, encontrar el valor de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n x_n + (1 - t_n) y_n).$$

- A) a B) $2a$ C) $\frac{a}{2}$
D) 1 E) 0

23. Discutir la convergencia de (P_n)

$$P_n = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[7]{16} \dots \sqrt[(2n+1)]{2^{n+1}}$$

Si converge calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

- A) converge, 2^e
B) diverge
C) converge, 2^{e-1}
D) converge, 2
E) converge, $2^{e/2-1}$

24. Halle el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln x)^n}$$

- A) \emptyset B) $\langle -\infty; +\infty \rangle$ C) $\{1\}$
D) $\langle -\infty; 0 \rangle$ E) $\langle -1; 1 \rangle$

25. Si $a_n = \sqrt[n]{n!}$ es el enésimo término de la sucesión (a_n) .

Halle el límite de la sucesión.

- A) 0 B) 1 C) ∞
D) 4 E) $\frac{1}{4}$

26. ¿Qué podemos afirmar acerca de la serie

$$1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \dots ?$$

- A) Es divergente.
B) No es absolutamente convergente.
C) Es absolutamente convergente.
D) Es alternante.
E) No podemos afirmar nada.

27. Calcular los valores de x en:

I. $\sum_{k=0}^{\infty} k^k (x-1)^k$

II. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^k} (x+3)^k$

para que las series sean convergentes.

- A) I. -3 ; II. $x \in \mathbb{R}$
B) I. 1 ; II. $x \in \mathbb{Z}$
C) I. -1 ; II. $x \in \mathbb{R}$
D) I. 9 ; II. $x \in \mathbb{N}$
E) I. 3 ; II. x

28. Calcular:

$$\sum_{k=0}^{30} (k^2 - 3k + 7) + \sum_{k=3}^{33} (9k - k^2 - 18)$$

- A) 100 B) 150 C) 217
D) -217 E) 115

29. Hallar la suma de la serie infinita sabiendo que es convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)}$$

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{2(x+1)(x+2)}$

C) x

D) n E) $\frac{1}{x}$

30. Calcular la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

- A) $1 + \sqrt{2}$ B) $\sqrt{2} - 1$ C) 1
D) $\sqrt{2}$ E) $1 - \sqrt{2}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left\lfloor \sin \frac{4\pi}{n} + 3 \right\rfloor}{4^n}$

- A) 1 B) n C) $\frac{63 \cdot 2^{10} + 1}{2^{16}}$
D) $\frac{1}{n^2}$ E) $\sin n$

32. Sea $0 < a$. Dar el valor de verdad con respecto

a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$

- I. Converge, si $0 < a < 1$.
II. Diverge, si $a > 1$.
III. Diverge, si $a = 1$.

- A) FFV B) VVF C) VFV
D) FFF E) FVF

33. Calcule: $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{5^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \right]$

- A) e B) $\sqrt{e^5}$ C) \sqrt{e}
D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{e^3}$

34. Calcule:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2}}$$

- A) 100 B) $\frac{10200}{101}$ C) $\sqrt{101}$
D) $\frac{10000}{101}$ E) 1

35. Calcule: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}$; $\alpha > 0$

- A) α B) $-\frac{1}{\alpha}$ C) $-\alpha$
D) $\frac{1}{\alpha}$ E) 1

36. Estudie la convergencia de

I. $1 + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots + \frac{1}{n \log n} + \dots$
II. $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1} + \dots$
con $x < \frac{1}{3}$

- A) I. diverge II. converge
B) I. converge II. diverge
C) I. diverge II. diverge
D) I. converge II. converge
E) I. 1 II. n

37. Estudie la convergencia de

I. $1 + \frac{1}{2+a} + \frac{1}{4+2a} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} + (n-1)a} + \dots$
II. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$

- A) I. diverge II. converge
B) I. converge II. converge
C) I. converge II. diverge
D) I. diverge II. diverge
E) I. 1 II. -1

38. Estudie la convergencia de:

$$S = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$$

en los siguientes casos:

- I. $K < 1$
II. $K = 1$
III. $K > 1$

- A) I. converge II. converge III. diverge
B) I. diverge II. diverge III. converge
C) I. converge II. diverge III. converge
D) I. diverge II. converge III. diverge
E) I. converge II. diverge III. diverge

39. Discutir la convergencia:

I. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + a} \right)$
II. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{x+n} - 1)$
III. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}) \right]$
IV. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})} \right)$

- A) I. converge II. diverge
III. diverge IV. converge
B) I. converge II. converge
III. diverge IV. converge
C) I. converge II. converge
III. diverge IV. diverge
D) I. diverge II. diverge
III. converge IV. converge
E) I. diverge II. converge
III. converge IV. diverge

40. Sea: $f(x) = 3 + 3(1+x) + 3(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots$

donde: $-2 < x < 0$ calcule: $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

- A) 2 B) 7 C) 3
D) 9 E) 6

41. Estudie la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{6n^2 + n + 1}$$

- A) converge B) n C) -1
D) \sqrt{n} E) diverge

42. Determine si la serie:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2(k-1)}$ es convergente o divergente. Si es convergente a que valor converge

- A) 2π B) $\frac{37\pi}{60}$ C) $\frac{37\pi}{120}$
D) $-\frac{37\pi}{120}$ E) $\frac{\pi}{2}$

43. Determine el valor de la siguiente suma

$$1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^4 + \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^5 + \dots$$

donde $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- A) 2 B) 2^{-1} C) 3^{-1}
D) 3 E) $\frac{1}{4}$

44. A qué valor converge la serie:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \frac{16}{3^4} + \dots$$

- A) $\sqrt[3]{e^2}$ B) $\sqrt[5]{e}$ C) $\sqrt[7]{e}$
D) $\sqrt[8]{e^3}$ E) $\sqrt[4]{e^3}$

45. A dónde converge la serie:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^5 + 3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^9 + 4\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{13} + 5\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{17} + 6\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{21} + \dots$$

- A) $2\sqrt[4]{8}$ B) $\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt[4]{4}$
D) $\sqrt[16]{2}$ E) $2\sqrt[4]{3}$

46. A dónde converge la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$$

- A) $\frac{91}{6}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{64}{225}$
D) $\frac{37}{54}$ E) $\frac{81}{99}$

47. Sabiendo que se cumple:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^k} = \frac{e}{e-1}$$

Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nk}}$

- A) 2 B) e C) e^{-1}
D) $e-1$ E) 1

48. Halle el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sin \sqrt{k}} - \frac{1}{\sin \sqrt{k+3}} \right)$$

- A) $\csc \sqrt{3} + \csc \sqrt{2} + \csc 1$ B) $\csc \sqrt{3}$
C) $\csc 1$
D) 0 E) 1

49. Calcule:

$$S = \frac{1}{1!4.5} + \frac{1}{2!5.6} + \frac{1}{3!6.7} + \frac{1}{4!7.8} + \dots$$

Nota: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

A) $3e - \frac{17}{12}$ B) $3e - \frac{90}{13}$ C) $3e - \frac{97}{12}$

D) $3e - \frac{86}{13}$ E) $3e - \frac{89}{12}$

50. Sea la serie alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.
Averiguar si es convergente o divergente.

A) Convergente

B) Divergente

C) Oscilante

D) Diverge a $+\infty$

E) Diverge a $-\infty$

51. Calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (6 + 18 + 30 + \dots + 6(2n-1))$

A) 1 B) 0 C) -1
D) 6 E) -6

52. Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

53. Calcule: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1
D) 0 E) -1

54. Calcule: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$

D) $-\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{4}$

55. Calcule: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{n^2} \right)$

A) 0 B) -2 C) -3
D) 1 E) -1

56. Calcule: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3}{n(n+1)(n+3)}$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $-\frac{7}{2}$
D) 1 E) 0

57. Calcule: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{(n-1)(n+2)n}$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{65}{36}$
D) 1 E) -1

58. Calcule: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{4}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 0

59. Calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$

A) \sqrt{ab} B) \sqrt{a} C) \sqrt{b}
D) -1 E) 0

60. Calcule: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$

A) -1 B) 1 C) 0
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

1 **C**

16 **B**

31 **C**

46 **C**

2 **B**

17 **C**

32 **A**

47 **E**

3 **D**

18 *

33 **B**

48 **A**

4 **C**

19 **E**

34 **B**

49 **C**

5 **E**

20 **B**

35 **D**

50 **A**

6 **D**

21 **A**

36 **D**

51 **D**

7 **A**

22 **A**

37 **B**

52 **D**

8 **C**

23 **E**

38 **B**

53 **A**

9 **D**

24 **A**

39 **A**

54 **E**

10 **E**

25 **C**

40 **D**

55 **D**

11 **C**

26 **C**

41 **E**

56 **B**

12 **B**

27 **A**

42 **B**

57 **C**

13 **B**

28 **C**

43 **A**

58 **D**

14 **B**

29 **B**

44 **A**

59 **A**

15 **C**

30 **E**

45 **A**

60 **B**